

**INSTITUTIONES  
PHILOSOPHICA  
E AD STUDIA  
THEOLOGICA  
POTISSIMUM...**

---



3. 8. 528.

3. K. 8









INSTITUTIONES  
PHILOSOPHICÆ

AD STUDIA THEOLOGICA  
POTISSIMUM ACCOMMODATÆ,

AUCTORE  
FRANCISCO JACQUIER

EX MINIMORUM FAMILIA  
PRIMARIARUM PER EUROPAM  
ACADEMIARUM SOCIO,  
IN LYCEO ROMANO, ET IN COLLEGIO  
URBANO DE PROPAGANDA FIDE  
PROFESSORE.

TOMUS TERTIUS,

*Quo Elementa Arithmetica, Algebra, &  
Geometria continentur.*

EDITIO NOVISSIMA  
Ab Auctore ipso recognita pluribusque  
in locis locupletata.



VENETIIS MDCCCLXVII.

SIMONIS OCCHI CURIS,  
*Superiorum permissu, ac Privilegio.*





## AUCTOR LECTORI.

**P**hysicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores Viros tanquam vanissimum merito habeatur Physicæ studium Geometriæ præsidio destitutum. Quæ cum ita sint, nemo mirari debet, quod a studiosis adolescentibus, sacræ licet Theologiæ destinatis, Arithmeticæ, & Geometriæ Elementa requiram; si enim his careant doctrinæ Physicæ adjumentis, satius est, eos huic præclarissimo studio valedicere omnino; *melius est nihil scire, quam male scire*. Tale enim cognitionis, potius dicam ignorantia genus mentis aciem hebetat, rectumque judicium corrumpit, & omni studiorum generi nocet plurimum. At me fortasse reprehendent censores aliqui, quod nova elementa ediderim, cum nihil fere in orbe litterario frequentius sit Elementorum libris. Neque talem me esse, quis sibi falso persuadeat, ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen a plerisque Elementorum Auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis Elementis, ratione licet, & methodo diversissimis, suam justam laudem concedendam esse, facile quisque fatebitur; si varias attenderit adolescentum conditiones, atque voluntates. Alii sublimiorem Physicam, Mathematicamque universam addiscere, & funditus haurire, sibi proponunt; alii autem aliis studiis, gravioribusque negotiis nati institutiones Geometricas strictim, leviterque tantum arripiunt, quantum scilicet expoliendo, per-

\* 2

ficien-



ficiendoque ingenio satis est; alii ultra Geometriam, quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili Geometriæ parte contenti sunt; alii tandem alios fines, aliaque consilia in animo habent. Quid ergo mirum, quod ego Arithmeticæ, & Geometriæ Elementa ad meas Physicas institutiones accommodatissima proponam? At quæcumque sit Elementorum ratio, demonstrationis severitas religiose semper tenenda est, neque obscura multarum propositionum farragine juvenum mens est obruenda, sed splendidiori accuratioris Geometriæ lumine illustranda. Monendi ergo sunt studiosi adolescentes, ut ab iis caute abstineant Elementis, quæ nec satis accurata methodo conscripta sunt, nec firmissimo demonstrationum robore munita. Perniciosissima quidem sunt studiosæ juventuti talia Elementa, quæ eos habent Auctores, quorum doctrina tota in Elementis continetur. Verum si recto proportionum ordine, nexuque necessario colligatæ fuerint demonstrationes omnes; ex hoc studio diligenter, & ut par est, instituto, in quolibet scientiarum genere fructum maximum sine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam existimationis geometrico studio detrahi debet, si aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam versatissimi, in vulgari tamen agendi ratione, & in rebus quoque familiarissimis omnino inepti. Id quidem, quod summa injuria objici solet,tribuendum est præcipiti quorundam Geometrarum iudicio. Non desunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus Mathematicis toti occupati, necessaria rerum tractandarum, vel gerendarum principia, & elementa non satis tenent;



nent; atque hinc mirum non est, quod aliquando errent graviter, Geometrarum, non Geometriæ vitio. Et requidem ipsa, si fons erroris probe attendatur, vitium in principiis, non vero in *consequentis* latere deprehenditur; contra autem alii homines non pauci veris utuntur principiis, errant autem in *consequentis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur geometrici studii pretium: si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu præditos, atque *cæteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem sit Geometriæ auxilio adjutus, alter autem destitutus, facile mihi persuadeo virum Geometram in quolibet scribendi genere, in tractanda etiam quæstione Theologica multo excellentiorem futurum: neque enim quæ prima sunt, postrema dicet, & vicissim; nec quæ perspicua sunt, & illustria, minus accurata methodo obscurabit; aut quæ abstrusa sunt, & involuta, densiori caligine non obvolveth. Verumne Geometriæ studio nimis tribuere videar, & hanc, quam maxime amo, disciplinam magnificentius prædicare, de iis non loquor melioris ingenii viris, in quibus excellens iudicium meditatione, & experientia subactum, atque perfectum miramur, siue graviora tractanda sint negotia, siue studiis quibuscumque danda sit opera. Has justissimas Geometriæ laudes attigisse satis sit ad excitandam adolescentum voluntatem. Faxit D. O. M., ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus Physicis tantum, sed etiam ut in studiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant, atque urgeant, hu-



hujus tamen sanctissimi dogmatis probe memores: *Captivare intellectum in obsequium fidei.*

*Cæterum monendum superest, Scholia, & Appendices in his Elementis prætermitti posse ab iis, qui minori pollent intelligendi facilitate; minus enim necessaria sunt hæc additamenta.*

---

## A P P R O B A T I O.

**R** Everendissimi Patris Thomæ Augustini Ricchini Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apostolici Magistri jussu legi doctissimi, eruditissimique Viri Reverendissimi Patris Jacquier *Elementa Arithmeticæ, Algebræ, & Geometriæ &c.* Quantum inde voluptatis cœperim, difficile est existimare. Nam cum nihil contineat, quod ab orthodoxæ Christianæ Religionis decretis, atque institutis discrepet, tum ita esse comperi, ordinate, accurate, dilucide, eleganter, tantoque nexu, ac tanta colligatione rerum perscriptum, ut ad ejus Physicas Institutiones illustrandas nihil supra desiderari posse videatur. Quare illud ajo, me vehementer cupere, ut quam fieri cito potest, in publicam emittatur lucem.

*Dabam Romæ ex Monasterio S. Mariæ Novæ die 27. Mense Augusto ann. 1760. D. ALOYSIUS STAMPA Abbas Olivetanus, Promovendorum ad Episcopatum Examinator, & in Collegio Urbano de Propaganda Fide Studiorum Præfectus.*

I N-



# INDEX

## Arithmetica, & Algebra.

CAPUT I.	<b>D</b> E præcipuis utriusque Arithmetica operationibus generalim consideratis..	Pag. 1
CAP. II.	De quatuor primis Arithmetica operationibus in numeris integris.	7
PROBL. I.	Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.	8
PROBL. II.	Numeros integros subtrahere.	9
PROBL. III.	Numeros integros multiplicare.	11
PROBL. IV.	Numeros integros dividere.	12
CAP. III.	De quatuor præcedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absolvendis.	21
PROBL. I.	Quantitates litterales addere.	ib.
PROBL. II.	Quantitates litterales subtrahere.	24
PROBL. III.	Quantitates litterales multiplicare.	25
PROBL. IV.	Quantitates litterales dividere.	28
CAP. IV.	De iisdem operationibus in numeris fractis.	32
CAP. V.	De radicum extractione.	49
CAP. VI.	De Proportionibus.	65
APP.	De Equationibus.	79

## GEOMETRIA.

PROEM.	De definitione, & divisione Geometriae.	91
	SECT.	

( VIII )

SECT. I. De Geometria linearum.	97
CAP. I. De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullo tamen spatio, seu nulla figura terminatis.	ib.
CAP. II. De linearum rectarum respectu circuli positione.	101
CAP. III. De lineis rectis, quæ spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.	103
CAP. IV. De linearum ratione, seu de proportionibus.	116
APP. De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.	127
SECT. II. De Geometria superficierum.	135
CAP. I. De præcipuis planarum superficierum proprietatibus.	ib.
CAP. II. De superficierum mensura.	139
SECT. III. De Geometria solidorum.	146
CAP. I. De Solidorum genesi, & proprietatibus.	ib.
CAP. II. De solidorum mensura.	152
APP. De lineis curvis.	161

ELE-




# ELEMENTA ARITHMETICÆ

TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ.

## CAPUT I.

*De præcipuis utriusque Arithmetica operationibus generatim consideratis.*

I.  *Arithmetica generatim definitur scientia computandi. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde & determinatos 1. 2. 3. &c. vel per alphabeti litteras a, b, c, &c. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio Arithmetica simpliciter dicitur: altera autem vocatur Arithmetica speciosa, vel Algebra; & convenientius a Nevvtono Arithmetica universalis appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi consuetudinem præmittimus; monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse: nisi earumdem scientiarum diligens præcedat analysis, atque accurata explicatio. Ita in præsentî calu, explicatis Arithmeticæ, & Algebrae operationibus, recte jam dicere liceret. Hæc, quam vobis explicavimus, scientia ea est, quæ Arithmetica, vel Algebra vocatur. Per numerum Arithmetici intelligunt unitatum multitudinem: at accuratius a Nevvtono definitur numerus relatio, seu ratio quantitatis*

Jacq. T. III.

A

cu-

cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem. Quæ quidem definitio, ut in bono lumine collocetur, observandum est, quantitatem quamlibet cum alia ejusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel majorem, vel tandem ipsi æqualem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere: hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minorem, quæ pro unitate assumitur, & in majori ter continetur. Contra autem si quantitas major 3 pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis majoris, quæ tanquam unitas consideratur, sive 1 ter in quantitate majori continetur. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, quem unitas metitur; fractus, qui est pars unitatis: ita 1. 2. 3. &c. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta &c. pars unitatis sunt numeri fracti: ita autem exprimi solent numeri fracti  $\frac{1}{2}$ .  $\frac{1}{3}$ .  $\frac{1}{4}$ .  $\frac{2}{3}$ .  $\frac{3}{4}$ . &c. Ratio, quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica*, vel *arithmetica* pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur; & prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam.

## II. Numeri omnes in vulgari Arithmetica

ca decem notis, five characteribus designantur; sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra*, five zero appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso, quem occupant, loco. Quæ ad sinistram postremæ occurrunt, designant unitates; quæ proxime præcedunt, unitatum decadas; exinde centenarii sequuntur, millenarii; & sic deinceps per decadas, & centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum *cyphra* destinatur; cum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo versus sinistram numero removens. Sic unitatis nota, quæ sola unicam designaret unitatem, beneficio unius, vel duplicis *cyphræ* in secundum, aut tertium locum rejecta denas, unitates, aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur; ita 247 exprimunt ducenas quadraginta septem unitates: at in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio; ita si legere oporteat longiorem numerum

.   3   .   2   .   1   .

3 242 578 562 914 020 467 212 ; hunc ita divides a postremis numeris exorsus; nempe tres postremos divides a præcedentibus puncto superius appposito, tribus sequentibus adscribes 1, & sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones, vel numerum; ita tamen, ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum hic factum vides. His peractis, quamlibet notarum classem perinde leges, ac si sola esset; & ubi punctum invenies, dic mille; ubi 1, dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, *mil-*

*licuem*; ubi 2, dic *milliones* *millionum*, sive *billiones*; ubi 3, dic *trillions*, & sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus præcedens: ter mille, ac ducenti quadraginta duo trillions, quingenta septuaginta octo millia, ac quingenti sexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia, ac viginti millions, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum, ac duodecim.

III. Vulgares explicavimus Arithmeticæ characteres, quorum auctores feruntur Astronomi Arabes: aliquid jam dicendum est de notis, quæ *Romanæ* appellantur. Notæ illæ, quarum in *Physicis Institutionibus* usus recurret, majusculis alphabeti litteris exprimiuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur; quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres Romani. Litteræ, quæ numeros Romanos componunt, sunt septem sequentes I. V. X. L. C. D. M. Harum notarum hæc est significatio. I. unitas: V. quinque: X. decem: L. quinquaginta: C. centum: D. quingenta: M. mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, æquivalent binario; si tria scribantur III, significant ternarium; numerus quaternarius ita exprimitur IV; & numerus novenarius hoc modo IX: nempe unitas numeris V, X præfixa eos multiplicat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6. 7. 8. scribi solet VI. VII. VIII. Si numero L, vel C præmittatur X; numeri illi decade minuuntur; ita XL significat 40, & XC 90: contra autem si numerum L sequatur X in hunc modum LX; numerus præcedens augetur decade significans 60 &c. Aliquando numerus 400 expressus



sus fuit litteris  $CD$ , sed raro. Præter litteram  $D$ , quæ exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo  $IC$ . Ita etiam loco  $M$ , aliquando scribitur  $CIC$ . Eodem modo exprimi potest 600 per  $ICC$ ; & 700 per  $ICCC$  &c. Si litteræ  $C$ , &  $I$  ante & post addantur; numerus  $CIC$  augetur in ratione decupla; ita  $CCIC$  significant 10000,  $CCCIC$  100000 &c. Hi erant communes Arithmeticæ characteres apud veteres Romanos, qui etiam numerum millenarium designare solebant adscripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo  $\overline{V}$ , & significat 5000;  $\overline{LX}$ , & designat 60000. Similiter  $\overline{M}$  æquivalet 1000000, &  $\overline{MM}$  designat 2000000. A recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquæ fuerunt adhibitæ; ita litteris  $IIX$  designant 8, litteris  $IICIX$  exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas inveniunt veteres Romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt Arithmetici, quam quidem invenire, aut aliam non multum dissimilem substituere, problema est a viris Arithmeticæ & antiquitatis studiosis solvendum.

IV. Quoniam numeri nihil aliud sunt, quem magnitudinum rationes quædam certis signis distinctæ; evidens est, Arithmetici, siue scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur Arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diversæ numerorum combinationes huc revocari possunt, ut nempe mutus eorum excessus, vel modus, quo se invicem

## 6 ELEMENTA ARITHMETICÆ

continent, expendatur, & assignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares Arithmeticæ operationes: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, *Divisio*.

V. *Additio* vocatur illa Arithmeticæ operatio, qua plures numeri simul colliguntur; *Subtractio* autem dicitur operatio, qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 2 & 3, ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 a majori 3 subtrahatur, ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio. Patet, in additione, & subtractione considerari mutuum numerorum excessum; etenim in additione excessus summæ ab alterutro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur. *Multiplicatio* appellatur illa Arithmeticæ operatio, qua idem numerus sibi metipso pluries additur; ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est, ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quater adjungatur; prodibitque 12. *Divisio* est Arithmeticæ operatio, in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest. Itaque patet, in multiplicatione, & divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in præcedenti multiplicatione innotescit, numerum 12 ter continere numerum 4; per divisionem autem demonstratur, numerum 4 ter contineri in 12. Ex his evidens est, multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisio nihil aliud est, quam composita subtractio. Quare ad duas dumtaxat revocari possunt quatuor vulgares Arithmeticæ operationes. Hinc Arithmeticæ operationes accurate

rate omnino definivit Nevvtonus: *compositionem*, & *resolutionem arithmeticam*; quæ quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura derivatur. Quamvis autem numeri sint rationes geometricæ, ex dictis tamen evidens est, additionem, & subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam; multiplicationem vero, & divisionem ad rationem geometricam referri. Cæterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes, aliæ sunt plurimæ; sed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Hic autem regulas Arithmeticæ generatim considerasse satis sit; patet autem, hanc, quam tradidimus Arithmeticæ notionem, Arithmeticæ speciosæ communem esse. Itaque licet Arithmeticæ nomen generatim usurpemus; illud tamen de Arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Jam vero universam Arithmeticæ utriusque doctrinam breviter, & distincte explicemus, quantum postulant nostrarum Institutionum necessitas, atque injuncta brevitās.

## C A P U T . II.

*De quatuor primis Arithmeticæ operationibus in numeris integris.*

I. **P**rima Arithmeticæ operatio dicitur *Additio*, quæ ex præcedentibus satis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus, atque demonstrabimus.

## P R O B L. I.

*Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.*

II. **A**ddendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. *Exempl.*

23561	
392	
8768	
49321	
82042	

Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subjiciantur, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, & a postrema columna exorsus dic, 1 & 8 efficiunt 9; 9 & 2 efficiunt 11; 11 & 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac præterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, & decadem rejice in sequentem decadum columnam dicens; 2 & 1 efficiunt 3; 3 & 6 efficiunt 9; 9 & 9 efficiunt 18; 18 & 6 efficiunt 24; hoc est, duas decadas decadum, sive duo centenaria, & 4 decadas; scribe ergo 4 in loco decadum, & duo centenaria in sequentem columnam rejice: eodemque pacto in hac, & reliquis operare; & tandem invenies summam quæsitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tanquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem rejiciuntur, quot decades collectæ sunt: quod quidem faciendum esse evidens est, cum nota quælibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo majorem, quam in præcedente. Igitur



tur in hac operatione adduntur singulæ unitates, singulæ decades, singula centenaria. Quare patet hujus operationis ratio, quæ quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obliquam diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perfecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quæ antea perspicue credebantur.

P R O B L. II.

*Numeros integros subtrahere.*

III. **S**ECUNDA Arithmeticæ operatio dicitur *Subtractio*, cujus totum hoc est artificium. Ut numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, a quo subtrahi debet, ita subjicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe; & residuum scribe infra lineolam, habebis numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori majorem esse, hanc augebis decem unitatibus, eaque mutuas accipies a proxime sequenti nota, quam proinde deinceps habebis tanquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2; auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 subduci nequeat; adjice huic decenas

23897	<i>Exempl.</i>
4245	
19652	
A 5	nas

nas unitates, & auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam superiorem proxime sequentem unitate mulstabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, ut denis unitatibus præcedentem augeres: habebis ergo residuum 1; ideoque residuum totum 19652.

Demonstratio satis per se constat; cum unitates ab unitatibus auferantur, decades à decadibus &c. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus, & numerus sequens 2 unitate mulsetur, ratio patet. Hæc nempe unitas in numero 3 decadi unitatum æquali est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3; quare etiam si unitatem dumtaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphræ, ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est unitas, quæ in cypham sequentem translata decem unitatibus æquivaleret. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transferretur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram ultimam decem unitatibus æqualem esse, cæteras vero antecedentes æquari novenario. Itaque evidens est hujus operationis ratio, nec vulgarium axiomaticum ope facilius intelligitur.

Ex additionis, & subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre, & sese invicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia; patet, minorem numerum residuo, sive differentię additum majori numero æqualem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggrega-

gatum, si ex aggregato alteruter numerus auferatur; numerum alterum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

P R O B L. III.

*Numeros integros multiplicare.*

IV. **T**ertia Arithmeticæ operatio vocatur *Multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe, ita ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a postremis factò. Decadas, quæ inter multiplicandum colliguntur, reponere adijciendas productò ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam inferioris notentur; ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

A 6

Mul-

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, & unam decadem seponne adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis unam decadem, & nullas præterea unitates, scribe igitur 0: & facto ex 3 in 2, quod est 6, adjiciens 1 scribe 7: rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0, ita ut multiplicatori 4 subjaceat, & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: & seponens 1, dic 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quæsitum.

*Exempl.*

$$\begin{array}{r}
 235 \\
 \underline{43} \\
 705 \\
 \underline{940} \\
 10105
 \end{array}$$

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura, si nempe in memoriam revocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus, quam in posterioribus; illico enim manifestum fiet, toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

## P R O B L. IV.

*Numeros integros dividere.*

V. **Q**Uarta Arithmeticae operatio vocatur *Divisio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quaestio, ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur: atque totidem unitates scribantur in numero, qui idcirco *quotus* dicitur. Haec ergo genuina est divisionis notio:



notio : nempe dividendus est ad diviforem ,  
ut quotus est ad unitatem ; vel dividendus  
est ad quotum , ut divisor est ad unitatem .

Proponatur dividendus nu-  
merus 10105 per 43. Nume-  
ro dividendo diviforem præfi-  
ge lineola interjecta ; tum o-  
perationem instituens in pri-  
mis notis dividendi , quæ exhi-  
beant quantitatem divifori æ-  
qualem , vel proxime majorem ;  
dic , quoties 43 continentur in  
101 , quotus erit 2. Scribe er-  
go 2 , lineola pariter interje-  
cta , ex altera parte dividendi ,  
& factum ex 2 in 43 , five 86 aufer ex 101  
& residuo 15 notam appone 0 , quæ in di-  
videndo proxime sequitur quantitatem jam  
divifam 101. Dic iterum , quoties 43 conti-  
nentur 150 , quotus est 3 ; quem scribe , ut  
ante ; & factum ex 3 in 43 , seu 129 aufer  
ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem no-  
tam dividendi 5 : & dic iterum , quoties 43  
continentur in 215 , quotus erit 5 , quem  
scribe cum aliis quoti notis ; & aufer ex 215  
factum ex 5 in 43 , five 215. Cum nihil ex  
ea divisione superfit ; patet , numerum 235  
illum accurate esse , qui oritur ex divisione  
10105 per 43.

*Exempl.*

$$\begin{array}{r} 43 \overline{) 10105} 235 \\ \underline{86} \phantom{00} \\ 150 \phantom{0} \\ \underline{129} \phantom{0} \\ 215 \phantom{0} \\ \underline{215} \phantom{0} \\ 000 \end{array}$$

Tota operationis ratio facile patet , si a-  
nimadvertamus , in hujusmodi operatione  
rem perinde se habere , ac si quæreretur ,  
quota pars quantitatis alicujus singulis homi-  
nibus obveniret , si eam ex æquo tot homi-  
nibus distribui oporterer , quot unitates con-  
tinet divisor . Nam in tota operationis serie  
inquirimus , quot unitates , decades &c. sin-  
gulis

gulis dari possint; iisque datis, quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Facile autem intelligitur post quamlibet subtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum æquale foret, vel majus, divisor in quantitate jam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo fita est, quod in numeris longioribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur; & tentamine utendum est; divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum est, quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Cæterum qui in Arithmetica satis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet, & divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præsentī operatione, quæ est omnium difficillima, rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2; statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est dividi

vidi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur 0 in quoto; tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ 2 suus fervetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero præcedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo & plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione superfit, quoto adjicienda est fractio. Ita si in exemplo præcedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numerum 417 ex æquo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent nummos 208, & dimidiam partem nummi, quæ ita scribitur  $\frac{1}{2}$ .

Ex hæcenus explicatis generatim etiam patet, satis esse primam dividendi notam per primam divisoris notam dividi, si in divisore, & dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persæpe necesse est duas primas dividendi notas primæ divisoris notæ subijci; idque fieri debere evidens est, quoties datus notarum numerus in divisore majorem habet valorem, quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo: verum si duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in dividendo tot notis, quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una infer adjecta, notarum numerum in



in quoto unitate excedere residuum notarum numerum in dividendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum novenario majorem esse posse. Etenim divisor decies æqualis esse non potest assumptæ dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur; at pars dividendi assumpta habet notarum numerum notarum divisoris numero æqualem, vel unitate majorem. In primo casu evidens est, dividendi partem assumptam minorem esse divisore decies sumpto, cum notarum numerum habeat unitate minorem: in secundo casu pars dividendi assumpta, si nota una versus dextram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus hac nota iterum auctus minor est divisore decies sumpto.

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa divisionis natura; cum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto: quare cum quotus exprimat, quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Cæterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est, multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum, aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem altero quotus est mul-



multiplicandus. Cum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur, quod in multiplicatione componitur, & contra. Cæterum in multiplicatione, & divisione compendia plurima usus docebit; hinc monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphræ, quot occurrunt in multiplicando, & multiplicatore simul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas prædictas. Item in divisione, si divisor, & dividendus cyphras contineant; in dividendo delendæ sunt tot cyphræ, quot occurrunt in divisore, quæ etiam in ipso divisore deleri debent, & reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est, compendium illud valere dumtaxat, si cyphræ fuerint ultimæ tum divisoris, tum dividendi notæ; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholium. In præsentī capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis, sive ejusdem speciei; at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diversæ speciei absolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est, quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At si numerum 3 generatim enuntiaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Jam in numeris diversæ speciei additio, & subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species:

cies: ita si addi debeant lineæ, pollices, pedes, exapedæ; sciendum est, lineas 12 pollicem unum æquare, pollices 12 pedem unum, & exapedam ex pedibus 6 constare. Ubi autem in linearum additione summa efficitur, quæ 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet; & ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio, si quantitas subtrahenda E. G. linearum numerus, iusto major sit; jam ex quantitate præcedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas, quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis, atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione, vel subtractione unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas, quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suæ respondeat. Hæc de additione, & subtractione.

Quod multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam Arithmeticis proponi videtur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, julis 3, assibus 3 in nummos 3, julios 3, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio, ut data quædam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Quæ ratione autem quantitates diversæ speciei per numerum abstractum

Etum multiplicentur, facile patet, si E. G. productum ex lineis in numerum abstractum majus sit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates, quot sunt numeri duodenarii; quod autem reliquum est, inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, restamen aliter se habet in divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus, vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest, quoties 2 contineatur in 6; quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 dividere possumus per 3, hoc est investigare possumus tertiam partem nummorum 6, & quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illæ duæ proportionēs; licet una, eademque videantur. Dividendus tanquam numerus concretus semper habetur, concretus autem, vel abstractus esse potest numerus divisor. In 1<sup>o</sup> casu quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, & locum habet proportio altera: quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6, *numerus concretus*, dividantur per nummos 2, *numerum* itidem *concretum*; quotus erit numerus abstractus 3; hic



hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet, quoties divisor contineatur in dividendo: erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus 3 est ad unitatem abstractam 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus scilicet dividendus, & concretus*) sunt ad quotum 3 (*numerus abstractum*); ut nummi 2 (*numerus divisor, & concretus*) ad 1 (*numerus abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem; cum enim numerus concretus, & numerus abstractus diversi sint generis; nulla inter eos comparatio, & ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, & secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per numerum abstractum 3, quotus erit nummi 2, (*numerus scilicet concretus*); habebiturque hæc proportio; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quorum, nummos 2; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportionem, unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest; vel enim quæritur, quoties quantitas una in altera ejusdem generis quantitate continetur, & hic est primus casus, vel quæritur quantitas, quæ certis vicibus in alia ejusdem generis quantitate contineatur, & hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversæ speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumpto ab iis, qui majorem habent valo-

valorem, divisio ex regulis præscriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. G. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversæ speciei per concretos itidem diversæ speciei dividi oporteat, jam numerum dividendi, tum divisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est; atque divisio fiat eodem modo, ac in numeris abstractis. Cæterum in multiplicatione, & divisione quantitatum diversæ speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quæ sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis jam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad maiorem operationum facilitatem: verum ad formandam earundem operationum ideam distinctam, necesse est, ut numeris sua deinde restituantur conveniens notio.

### C A P U T III.

*De quatuor præcedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absolvendis.*

#### P R O B L. I.

*Quantitates litterales addere.*

I. **Q**uantitatibus litteralibus præfiguntur signa, quorum significationem præmitti omnino necessum est. Signum additionis est  $+$ , signum autem subtractionis

nis est  $-$ , æqualitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo  $=$ . Ita  $a = a$ ,  $a + a = 2a$ ,  $a - a = 0$ . Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficientis* vocatur, ita in quantitate litterali  $2a$  numerus  $2$  coefficientis appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tanquam illius coefficientis censeretur debet; ita  $a = 1a$ , ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si eandem contineant litteras, & eundem earundem litterarum numerum, etiam si diversis coefficientibus notentur,  $+ 2a$ , &  $- 5a$  sunt quantitates similes; at *dissimiles* sunt quantitates  $a$  &  $b$ , atque etiam quantitates  $a$  &  $aa$ . Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quæ plures habet litteras signo  $+$  vel  $-$  connexas, Ita  $a + b$  constat ex duobus terminis & *binomium* dicitur;  $a + b + c$  ex tribus terminis, & *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*; ita  $a$ ,  $ab$ ,  $abc$  sunt quantitates simplices.

His præmissis definitionibus, quantitarum litteralium additio jam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si  $a$  &  $a$  addi debeant, habebitur  $2a$ ; si addere oporteat  $a$  &  $2a$ , summa erit  $3a$ , & ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes, & coefficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo  $+$  vel  $-$ , si quantitates eodem signo afficiantur. At si diversa fuerint signa, jam coef-

ficiens

fiens minor a majori subtrahi debet & differentia cum majoris coefficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum, & positivarum quantitarum natura. Etenim quantitates positivæ quantitatibus negativis sunt directè contrariæ. Quare si quantitates addendæ similes sint, signisque contrariis affectæ, vel se se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas una sit altera major, destruitur in majori quantitate pars minori æqualis, & residuum est quantitatis utriusque differentia, quæ quidem differentia signo majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens est, quantitates  $+ 5df$  &  $- 3df$  reduci ad  $+ 2df$ ; nam  $+ 5df$  est quantitas  $df$  quinquies sumpta, &  $- 3df$  est quantitas  $df$  ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumpta, & ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter  $+ 5fm$  &  $- 6fm$  reducitur ad  $- 1fm$ , vel ad  $- fm$ . Nam  $- 6fm$  est quantitas  $fm$  sexies subtracta, &  $+ 5fm$  est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas  $fm$  semel subtrahitur, & remanet negativa, seu fit  $- fm$ . Ea-

dem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis.

*Exemplum.*

Quantitates addendæ ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulæ partes seorsim considerantur, ut simplices, & additio fit, ut modo præscriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui se se mutuo destruunt, scribi solet stellula, vel zero,

$$\begin{array}{r}
 3ab - 5cs - 4dr + 2s \\
 - ab + 4cs + 4dr - s \\
 \hline
 2ab - cs \quad * \quad + s
 \end{array}$$



zero. Tota operatio patet ex præfenti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint dissimiles, eas signo  $+$  vel  $-$  connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat  $a$  &  $b$ , vel  $a$  &  $-b$ , scribendum est  $a + b$ ,  $a - b$ .

## P R O B L. II.

*Quantitates litterales subtrahere.*

II. **I**N subtractione considerantur quantitates singulæ subtrahendæ, tanquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, & fiat summa ex legibus jam præscriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum  $+$  in  $-$ , &  $-$  in  $+$ , & additio de more fiat. Ita subtrahitur  $b$  ex  $a$ , scribendo  $a - b$ . Si  $b - c$  ex  $a + c$  subtrahi oporteat, scribitur  $a + c - b + c = a - b + 2c$ . Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur; deinde mutatis signis, ut jam dictum est, tota quantitatum series scribitur, & postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatuum differentia infra lineolam scribenda. Quod autem in quantitate subtrahenda signum  $-$  mutetur in  $+$ , ratio facile patet. Si ex  $a$  subtrahi debeat  $b - d$ , scribaturque primo  $a - b$ , subtractio iusto major est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas  $b$ ,

	Exempl.
Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur;	$\begin{array}{r} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd. \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd. \end{array}$



b, sed b mulctata quantitate d; quare iusto major est subtractio, & excessus est ipsa quantitas d, quæ proinde cum signo politico + restitui debet, & scribendum est  $a - b + d$ . Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus  $5 - 3$ , ex præscripta regula scribendum est  $6 - 5 + 3$ , hoc est 4, reductione facta. Quod evidens est. Si enim scriberes  $6 - 5 - 3$ ; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim sit  $5 - 3 = 2$ , ex numero 6 subtrahi debet dumtaxat numerus 2. Cæterum patet, in calculo litterali non secus, ac in arithmetico additionem, & subtractionem sibi mutuam probationem præbere; ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

### P R O B L. III.

*Quantitates litterales multiplicare.*

III. **S**ignum multiplicationis est  $\times$ , quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, & sola conjunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit  $a = 2$ ,  $b = 10$ ; erit  $ab = 2 \times 10 = 20$ . Si eadem quantitas per se ipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paulo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset. Ita  $aa = a^2$ ,  $aaa = a^3$ . Cavendum, ne confundatur  $a^2$  cum  $2a$ ; sit  $a = 5$ , erit  $a^2 = 25$ ,  $2a = 10$ ; sit  $b = 7$ , erit  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 = 7 \times 7 = 49$ ; parenthesis autem  $()$ , vel lineola — producta designat, totam quantitatem  $a +$

Jacq. T. III.

B

b in

*b* in seipsam multiplicari. Numerus supra positus est *index*, seu *exponens potentia*, ut vocant, vel *potestatis*, seu *dignitatis* quantitatis ipsius, & exprimit, quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Ita  $1 \times a = a^1$ ;  $1 \times a \times a = a^2$ ;  $1 \times a \times a \times a = a^3$  &c.

In quantitarum compositarum multiplicatione scribenda est altera quantitas sub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundæ, scribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam; & ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diversorum hujusmodi productorum alios sub aliis; deinde omnium linearum colligenda summa. Omnium vero hujusmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non secus, ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coefficientes, litteræ, & exponentes; hinc quatuor præscribuntur regulæ, 1. Si signa fuerint eadem, positiva scilicet, vel negativa, productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita  $+$   $\times$   $+$   $=$   $+$ ;  $+$   $\times$   $-$   $=$   $-$ ;  $-$   $\times$   $+$   $=$   $-$ ; &  $-$   $\times$   $-$   $=$   $+$ . 2. Coefficientes in se invicem multiplicantur. 3. Litteræ ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4. Si quantitas aliqua exponente afficiatur, eaque multiplicari debeat per eandem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita ut tamen hujus quantitatis exponens æqualis fiat exponentium summæ. Operatio

ratio tota patet  
 exemplo. Quan-  
 titas multipli-  
 canda superiori  
 loco scribitur.  
 Deinde multi-

Exempl.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ac - bc \\ a - b \end{array}$$

---


$$\begin{array}{r} a^3 + 2a^2c - abc \\ - a^2b - 2abc + b^2c \end{array}$$


---

plicatur per  $a$ , & producta singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per  $-b$ , productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes singulae, ut moris est, in summam colliguntur. Id vero pro majori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similes productorum partes aliae sub aliis scribantur, & sibi invicem respondeant, ut in additione praescriptimus. Quod spectat tres ultimas leges, haec satis patent ex antea demonstratis; verum quod attinet signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Signorum multiplicatio, quae tyronibus difficultatem afferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva  $+$   $a$  multiplicatur per aliquem numerum positivum  $+n$ , sensus est, quantitatem  $+$   $a$  toties sumi, quoties unitas continetur in  $n$ ; atque proinde productum fit  $na$ . Si  $-a$  multiplicari debeat per  $+n$ , sensus est,  $-a$  quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continentur in  $n$ ; ideoque productum est  $-na$ . Simili modo si multiplicetur  $+$   $a$  per  $-n$ , sensus est, quantitatem  $a$  toties subtrahi, quoties unitas continetur in  $-n$ ; ideoque productum est negativum, seu  $-na$ . Si  $-a$  multiplicare oporteat per  $-n$ , sensus est,  $-a$  toties subtrahendum esse, quoties unitas est in  $-n$ , sed subtractio quantitatis

B 2

nega-

negativæ  $-a$  æquivalet additioni  $+a$ ; quare productum est  $+na$ . Nemo non videt, productum ex quantitate positiva in positivam fieri positivum. Sed alii casus hoc modo rursus illustrari possunt. Cum sit  $+a - a = 0$ , si multiplicetur  $+a - a$  per  $n$ , productum debet esse  $0$ . Jam vero primus producti terminus est  $+na$ , ergo terminus alter debet esse  $-na$ , qui destruat primum terminum  $+na$ , ita ut productum sit  $+na - na = 0$ . Quare  $-a \times +n = -na$ . Simili modo, si multiplicetur  $+a$ , &  $-a$  per  $-n$ , primus producti terminus est  $-na$ ; quare terminus alter est  $+na$ ; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, cum sit  $a - a = 0$ . Ergo  $-a \times -n = +na$ .

## P R O B L. IV,

*Quantitates litterales dividere.*

IV. **S**ignum divisionis est lineola interposita dividendum separans a diviso-

re: ita  $\frac{a}{b}$  designat,  $a$  dividi per  $b$ ; divisio

etiam designatur interpositis binis punctis hoc modo  $a : b$ . Verum his signis utendum est dumtaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quæ unico constant termino. Si proponatur dividenda quantitas  $a^2 bc$  per

$a^2 c$ , erit  $\frac{a^2 bc}{a^2 c} = b$ ; ac proinde quotus

erit



$$6a^2 bc$$

erit b. Simili ratione  $\frac{10a^2 b}{6a^2 c} = \frac{10b}{6c}$ . At

$$\frac{10a^2 b}{6a^2 c} = \frac{10b}{6c}$$

In hoc sita est tota divisionis operatio, ut ex dividendo, & divisore expungantur litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens est, divisionem institui debere non secus, ac in Arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo, & divisore delean- tur litteræ communes; non tamen putan- dum est, quotum ex quantitate per seipsam

divisa esse  $\frac{abc}{abc} = 0$ ; ita  $\frac{abc}{abc}$  non est  $\frac{abc}{abc}$

0; delentur quidem litteræ omnes, sed quan- titati litterali præfixus semper intelligitur coef-

$$\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1}$$

1. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet semel in seipsa contine- tur. Quare in hoc casu quotus est semper unitas. Quod signorum leges spectat, ex- dem omnino sunt, quæ pro multiplicatio- ne; nempe si + dividatur per +, & — per —; quotus signo + afficitur; contra autem si dividatur + per —, vel — per +, quotus afficitur signo —. Tota expli- catæ operationis ratio evidens est ex ipsa di- visionis natura; cum enim productum ex divisore in quotum dividendo æquale esse debeat; manifestum est, quotum ex divisio- ne quantitatis negativæ per negativam oportere

tere esse positivum. Ponamus enim, esse negativum, jam productum ex quoto negativo in divisorem negativum foret positivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda, quæ ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliæ signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat  $9ab^2$

$15a^2b + 6a^3$	<i>Exempl.</i>	$2a^2 - 3ab$
$per - 3ab +$	$6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$	$3a - 3b$
$2a^2$ . Singuli ter-	$6a^3 - 9a^2b$	
mini ita disponi	$- 6a^2b + 9ab^2$	
debent, ut sume-	$- 6a^2b + 9ab^2$	
tur divisionis ini-	$* \quad *$	

tium ab illo termino, qui ad maximam e-  
vectus est potestatem, & ita per gradus pro-  
grediendo, ut hic factum vides. Itaque di-  
vidas  $6a^3$  per  $2a^2$ : prodit quotus  $3a$ , per  
quem divisor totus multiplicatur, productum-  
que  $6a^3 - 9a^2b$  subtrahas ex dividendo;  
residuum fit  $- 6a^2b$ , cui addas  $9ab$ , &  
dividere pergas, ut ante: quotus est  $- 3b$ ;  
productumque ex hoc quoto & divisore  $- 6a^2b + 9ab^2$  iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata est  
divisio. Si autem peracta operatione aliquid  
superfit, ita ut divisor, & reliqua pars di-  
videndi nullas communes habeant quantita-  
tes, jam divisio accurate fieri non potest,  
sed quoto invento jungenda est fractio: de  
fractionibus autem tractabitur in proximo  
capite.

Sæpe contingit, divisionem in infinitum  
continuari, & tunc quotus fit, ut vocant,  
*series infinita*. Exemplo sit unitas dividen-  
da per  $1 - a$ . Operatio est hujusmodi.

$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1 - a \\ \hline + a \\ + a - aa \\ \hline + aa \\ + aa - aaa \\ \hline + aaa \&c. \end{array}$	<p style="text-align: center;">quotus est</p> $1 + a + aa + a^3 + a^4 \&c.$ <p style="text-align: center;">in infinitum.</p>
--	--

Hæc pauca exempla satis sint. Cæterum patet, multiplicationem, & divisionem in quantitatibus litteralibus non secus, ac in numeris sibi mutuam probationem conferre, ita ut multiplicatio per divisionem, & viceversa divisio per multiplicationem confirmetur.

Schol. In hoc capite frequens fuit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudinis æquales ad partes directe oppositas simul, & in eodem subjecto conjunctæ intelligantur, sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo æqualis est. Ita si potentiaæ duæ æquales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; jam illi 100 nummi, si ad hujus hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, & 200 alteri debeat, jam possessio hujus hominis negativa est, &

ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur; jam hujus hominis iter tanquam negativum, & minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, & nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est, quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivæ quantitati opponitur; juncta scilicet quantitati positivæ ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum zero non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum, & *relative*, non autem *absolute*, nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tyronibus facessere possit.

## C A P U T IV.

*De iisdem operationibus in numeris fractis.*

I. **N**umeri fracti definitionem jam in primo Capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem, interposita lineola, separantur ita, ut dividendus supra lineolam, & divisor infra scribantur in hunc modum  $\frac{3}{4}$ , — &c. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, & divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duæ

quantitates; ita  $\frac{a}{b}$  significat quotum ex a  
per



per  $b$ ; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot ejusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur; ac proinde pars illa considerari potest tanquam unitas aliqua. E. G, fractio  $\frac{3}{4}$  nihil est aliud, quam pars quarta alicujus totius ter sumpta; hæc autem pars quarta tanquam unitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur, quatione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cujus denominator sit 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque  $\frac{12}{4}$ , erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus 3 multiplicetur, simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones, in quibus numerator major est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat ita appellantur. Pari ratione si quantitas  $a$  reduci debeat in fractionem litteralem, cujus denominator sit  $b$ ;

$$\text{habebitur } \frac{ab}{b} = a.$$

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quæ diversum habent denominatorem, ad

eundem redigantur. Sint fractiones duæ  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ; multiplicetur fractio  $\frac{a}{b}$  per  $d$ , simulque

B 5 que

que dividatur per  $d$ , erit  $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$ . Simili modo multiplicetur fractio  $\frac{c}{d}$  per  $b$ , simulque dividatur, erit  $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$ . Ita-

que generatim fractiones ad eundem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius, & viceversa, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est, hanc operationem eandem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio excepto denominatore; producta singula dabunt numeratores singulos quæsitos. Deinde denominatores singuli in seipsos ducantur, habebitur denominator

communis quæsitus: ita fractiones  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{c}$ ,

$\frac{c}{d}$  reducuntur ad  $\frac{ccd}{bcd}$ ,  $\frac{bbd}{bcd}$ ,  $\frac{ccb}{bcd}$ . Pa-

tet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,

respective æquales sunt fractionibus  $\frac{40}{60}$ ,  $\frac{45}{60}$ ,  $\frac{48}{60}$ .

III. Hinc facile adduntur, & subtrahuntur fractiones; reducantur scilicet ad denominatorem communem, sumatur numeratorum summa, vel differentia, & subscribatur denominator communis. In illo casu habebitur additio, in hoc autem subtractio.

Ita

$$\text{Ita } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}, \&$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}. \text{ Similiter in numeris}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12} : \&$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}. \text{ Fractiones ex}$$

integræ, & fractis compositæ, qualis est

$1\frac{5}{12}$ , appellantur mixtæ. Ex his autem sta-

tim intelligitur, quomodo numeri integri, & fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi. Integri ad fractos reducuntur, & ad denominatorem communem, atque operatio fiat, ut ante. Quamvis autem additionis, & subtractionis operationes ex dictis sint manifestæ, demonstrari tamen pos-

sunt hoc modo. Sint fractiones duæ  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{b}$

ad eundem denominatorem reductæ, erit

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \& \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$\frac{a-c}{b}$ . Etenim ponatur  $\frac{a}{b} = m$ , &  $\frac{c}{b}$

$= n$ ; erit, facta multiplicatione per  $b$ ,  $a = mb$ ,  $c = nb$ , &  $mb + nb =$

$$a + c; \text{ ac proinde } m + n = \frac{a+c}{b}, \text{ hoc est}$$

est  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ . Simili modo patet,

esse  $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a-c}{b}$ .

IV. Nulla reductione opus est, ubi fractiones multiplicare, & dividere oportet. In multiplicatione satis est numeratores, & denominatores invicem ducere; habebitur numerator & denominator fractionis quæsitæ, quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendæ per alterius denominatorem est multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus est. Ita productum

ex  $\frac{a}{b}$  per  $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ . Quotus autem ex  $\frac{a}{b}$

per  $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ . Etenim ponatur  $\frac{a}{b} = m$ ;

erit, ut ante,  $a = bm$ . Similiter ponatur

$\frac{c}{d} = n$ ; erit  $c = dn$ . Jam demonstrian-

dum superest, esse  $\frac{ac}{bd} = mn$ , &  $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$ ;

quod quidem facile patet, substituendo loco  $a$ , &  $c$  illorum valores  $bm$ , &  $dn$ ; erit e-

nim in primo casu  $\frac{bdmn}{bd} = mn$ ; in casu

autem altero fiet  $\frac{bdmn}{bd} = \frac{m}{n}$ . Demonstratio

tio



tio generalis est, ac proinde in numeris quibuslibet fractis eadem est operatio. Sic pro-

ductum ex  $\frac{2}{6}$  in  $\frac{3}{8} = \frac{8}{48}$ . Sic quotus ex

$\frac{3}{6}$  per  $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$ . Manifesta quoque

est operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari, aut dividi debeat; considerari enim debet numerus integer tanquam fractio impropria, in qua denominator est unitas, & reliqua peragenda, ut ante. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in divisione per denominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa præbeat numerum integrum; cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem; quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis, & divisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri: *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita si sumantur  $\frac{2}{7}$  fractionis  $\frac{1}{4}$ , operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars  $\frac{1}{3}$  fractionis  $\frac{3}{4}$ , multiplicandus esset denominator per 3, habereturque  $\frac{1}{12}$ . At sumi non debet dumtaxat pars tertia, duæ tertiæ partes sumendæ proponuntur, quare productum præcedens duplo majus fieri debet, hoc est, numerator mul-

multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliæ quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos, & singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variæ speciei agatur. E. G. Quæritur, quanti constiterint 35 mensuræ mercis alicujus, si mensuræ unius pretium sit 24 nummorum & assium 15. Multiplicentur primo 25 per 24, erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem, considerari potest, esse 15  $\equiv$  10 + 5. Jam si asses 10 nummo æquivalent, productum foret 35. At sunt pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum est in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur, quæ ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquantæ* vocantur. Cæterum exercitatio, atque attentio multa docebunt, quæ fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis Arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam superest, ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divilorem præter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cujusmodi sunt 1. 5. 7. 11. 19, quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos præter unitatem alii quoque numeri metiuntur; sic 12 componitur ex 2 & 6,



6, itemque ex 3 & 4. Quare 2. 3. 4. 6 metiuntur 12, seu aliquoties sumpti 12 adæquant; illi autem numeri dicuntur *factores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator sit numerus compositus, & resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per numerum, qui sit etiam numeratoris divisor communis, jam licebit fractionem hanc ad minimos terminos deprimere, quod ita præstari potest. Dividatur major numerus per minorem; si nihil ex divisione supersit, jam minor numerus est maximus divisor communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur; si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum; si autem nullum supersit tertium residuum, jam residuum secundum pro maximo divisore communi haberi debet; atque ita progrediendum, donec nihil supersit, atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio  $\frac{91}{294}$ . Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est 7. Tandem residuum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, & divisio est accurata. Quare numerus 7 est maximus communis divisor, per quem divisus numeratore, & denominatore, fractio præcedens

in

in hanc simpliciore abit  $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$ . Æ-

quales autem esse fractiones illas, ex natura divisionis omnino patet. At si divisione instituta, ad unitatem tandem, ultimum residuum, perveniatur, jam nulla est mensura communis præter unitatem.

Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus, in quibus tamen nonnulla adverti debent. Ordinatis, ut fieri solet, divisoris, & dividendi terminis, observandum est, an singuli termini divisoris, & dividendi possint dividi per monomium aliquod commune: tunc enim, facta divisione, reponi debet divisor ille, per quem deinde, facta operatione, multiplicabitur divisor communis. Præterea dividi debet, si fieri possit polynomium utrumque per quantitates, quæ primum terminum accurate dividunt: negligitur autem divisor ille, nisi idem sit in duobus polynomiis. Tandem si coëfficiens primi termini in divisore non possit accurate dividere primum terminum in dividendo; ita multiplicari debet dividendus per quantitatem hanc, ut accurata succedat divisio: aut etiam, quod idem est, ut coëfficiens simplicior fiat, quæritur maximus communis divisor utriusque coëfficientis, per quem divisor ipse dividitur, dividendus autem per quorum divisionis multiplicatur. Tota operationis ratio patet. Si enim multiplicetur, aut dividatur polynomium alterutrum per quantitatem aliquam, quæ accurate non dividat polynomium alterum; evidens est, non mutari communem polynomiorum divisorem. Sed res exemplo fiet magis manifesta. Sint polynomia duo



$$\begin{array}{r} a^2 + bda + b^2d \\ - bba - bd^2 - d^2a \\ \hline \end{array}$$

&  $a^2 + da^2 - ba - b^2d$

Primum dividitur per secundum, quotus 1 negligitur: residuum autem est

$$-da^2 + bda + 2b^2d - d^2a - bd^2$$

Quia vero singuli termini sunt divisibiles per  $d$ , fit divisio; habeturque

$$-a^2 + ba + 2b^2 - da - bd$$

Per hanc quantitatem dividitur primus divisor, quotus fit  $-a$ ; ut ante negligitur: & residuum est  $ba^2 + b^2a - b^2d - bda$ ; quod divisum per  $b$ , fit  $a^2 + ba - bd - da$ ; per quod residuum dividatur ultimus divisor, quotus est  $-1$ , & residuum  $2ba + 2b^2 - 2da - 2bd$ : quod dividitur per  $2b - 2d$ , quotus est  $a + b$ , qui est ultimus divisor sine ullo residuo; ac proinde  $a + b$  est maximus divisor communis.

Tota operationis series facile demonstratur paucis observatis. 1°. Mensura quælibet communis  $x$  quantitatum duarum  $a$ , &  $b$  metitur quoque illarum summam, vel differentiam  $a \pm b$ . Nam sit  $m$  quotus emergens ex divisione  $a$  per  $x$ ; &  $n$  quotus ex divisione  $b$  per  $x$ : nempe  $m = \frac{a}{x}$ , &  $n = \frac{b}{x}$ ; erit

$a = mx$ , &  $b = nx$ . Quare  $a \pm b = mx \pm nx = (m \pm n)x$ .... 2°. Si  $x$  sit mensura quantitatis alicujus, evidens est, eam fore mensuram ejusdem quantitatis utcumque multiplicæ.... 3°. Si  $b$  contineatur in  $a$ , quoties unitas continetur in  $m$ , sitque præterea residuum aliquod  $c$ ; quantitas quælibet, quæ metietur  $a$ , &  $b$ , metietur quoque residuum  $c$ . Nam (ex hyp.)  $a = mb + c$ ; quare  $a - mb = c$ . Sed  $x$  metitur  $b$ ; ergo me-

metitur quoque  $mb$  ejus multipulum: ac proinde metitur quoque  $a - mb$ ; ideoque  $c = a - mb$ . Si residuum  $c$  contineatur in  $b$ , quoties  $n$  continet unitatem; sitque præterea aliud residuum  $d$  ita ut  $b = nc + d$ , &  $b - nc = d$ ;  $x$  metietur etiam  $d$ . Nam (ex hyp.)  $x$  metitur  $b$ , atque etiam  $c$  (ex dem.). Ergo metitur etiam  $nc$ , &  $b - nc = d$ . Quare cum subtrahendo  $b$  ex  $a$ , quantum fieri potest, residuum  $c$  metiatur  $x$ ; itemque subtrahendo  $c$  ex  $b$ , quantum fieri potest, residuum  $d$  metiatur  $x$ ; & ita deinceps de quolibet residuo: quantitas  $x$  communis mensura ipsarum  $a$ , &  $b$  metietur residuum quodlibet; residuum vero ultimum, quod præcedens residuum metitur accurate, erit communis mensura ipsarum  $a$ , &  $b$ . Nam ponamus, residuum illud esse  $d$ , quod contineatur in  $c$ , quoties unitas continetur in  $r$ : ergo  $c = rd$ . Præterea  $a = mb + c$ ,  $b = nc + d$ ; sed  $d$  metitur  $c$ ; quare metietur etiam  $nc$ ; &  $nc + d = b$ . Quia vero metitur  $b$  &  $c$ , metietur etiam  $mb + c = a$ ; ideoque erit mensura communis inter  $a$ , &  $b$ . Tandem erit maxima communis mensura; nam mensura quælibet communis inter  $a$ , &  $b$  metitur aliam  $d$  (ex dem.): sed maxima mensura ipsius  $d$  est ipsa quantitas  $d$ ; ergo erit maxima communis mensura inter  $a$ , &  $b$ . Demonstrata ergo est vulgata maximi communis divisoris regula.

VI. De fractionum communi divisore & numeris primis pauca addenda supersunt, quæ deinde utilitatis maximæ futura sunt. 1. Si duo numeri  $a$  &  $b$  fuerint primi inter se, tertius autem numerus  $c$  metiatur primum  $a$ ; hic erit primus respectu  $b$ . Nam  
 si  $c$ ,



si  $c$ , &  $b$  non essent numeri primi, haberent mensuram communem, quæ cum metiatur  $c$ , foret quoque mensura ipsius  $a$ , quam metitur  $c$ . Quare  $a$ , &  $b$  haberent mensuram communem contra hypothesim.....

2. Si duo numeri  $a$ , &  $b$  sint primi respectu  $c$ ; productum  $ab$  erit quoque numerus primus respectu  $c$ . Nam productum ex duobus numeris  $a$  &  $b$  nullos potest habere divisores, nisi vel numeros ipsos  $a$ , &  $b$ , vel partes illorum aliquotas, vel alterutrius numeri multiplos. Sed numeri  $a$ , &  $b$  non possunt esse divisores numeri  $c$ , cum respectu  $c$  sint numeri primi; ac proinde partes illorum aliquotæ divisores esse non possunt. Tandem si  $c$  dividi posset per numerum aliquem multipulum ipsius  $b$ , dividi etiam posset per ipsum numerum  $b$  (contra hyp.). Quare si  $a$ , &  $b$  sint numeri primi respectu  $c$ , productum  $ab$  erit quoque numerus primus respectu  $c$ : par ratione si  $a$ , &  $c$  sint numeri primi inter se, erit etiam  $a^2$  numerus primus respectu  $c$ ; nam ponatur  $a = b$ , erit  $ab = a^2$ ; ideoque  $a^2$  erit numerus primus respectu  $c$ . Similiter  $c^2$  erit numerus primus respectu  $a$ ....

3. Si duo numeri  $a$ , &  $b$  sint primi respectu numerorum  $c$ , &  $d$ ; producta  $ab$ , &  $cd$  erunt quoque numeri primi inter se. Nam  $ab$  est primus respectu  $c$ , &  $d$ ; ergo  $cd$  erit primus respectu  $ab$ . Quare etiam si  $a$  &  $c$  sint numeri primi; erit  $a^2$  numerus primus respectu  $c^2$ . Et generatim productum ex numeris primis quibuscumque divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris itidem primis ad simpliciores terminos reduci non

potest. Quare si  $\frac{a}{b}$  sit fractio ad minimos.

ter-



terminos reducta; erunt quoque  $\frac{a^2}{b}$ ,  $\frac{a^1}{b}$ ,  $\frac{a^0}{b^1}$ .

fractiones ad simplicissimos terminos reductæ; ac proinde fractio quælibet sive pura, sive mixta ad potentiam quamlibet evecta semper manet fractio.

Schol. Præter fractiones in hoc Capite explicatas considerari etiam debent fractiones, quæ *decimales* appellantur. Illæ scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore: atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat, cujus numeris præfixa est virgula, alii punctum præfigunt, quod fit, ut numerator a numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendam fractionem  $19 \frac{4}{100}$  scribi solet 19,

4. Ad exprimendam fractionem  $19 \frac{4}{100}$  scribitur 19, 04; cyphra numero 4 præfixa indicat, denominatorem esse 100. Fractio  $19 \frac{4}{1000}$  ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, & ita deinceps per decadas semper progrediendo; sic  $4, 217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$ . Fractionum decimalium utilitas maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E. G. Si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum residuo 141, cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit

erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur 0, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur 0; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse, evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio  $\frac{3}{4}$  in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur 0, dividaturque 40 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur 0, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare  $\frac{3}{4} = 0,75$ . Et requidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit  $\frac{3}{4}$  ejusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datæ per 100, vel 1000 &c, productum illud divisum per denominationem erit numerator fractionis decimalis, cujus denominator est 100, vel 1000 &c. Sæpe tamen contingit, fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcunque cyphræ addantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri eodem ordine redeant. Ita si fractionem  $\frac{4}{7}$  ad decimalem reducere volueris, invenies 0, 571428571428571428 &c. nec unquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem  $\frac{5}{12}$  in decimalem, invenies 0, 416666 &c. In his autem casibus

bus duas, vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquæ autem negliguntur. Ita poni possunt  $\frac{4}{7} = 0,57$ , &  $\frac{5}{12} = 0,416$ .

Hæc quidem pauca satis esse possent iis, qui demonstrationis leveritatem non quærunt; sed rem utilissimam generatim, & omnino

accurate ostendemus. Sit  $\frac{p}{q}$  fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem  $\frac{r}{10^n}$ , in

qua  $n$  exprimit cyphrarum numerum, ponaturque  $r$  numerus integer, &  $r = \frac{p \times 10^n}{q}$ .

Sed est  $10^n = 2^n \times 5^n$ ; non potest autem  $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$

abire in numerum integrum  $r$ , nisi

$q$  æqualis sit alicui potestati ipsius 2, vel 5, vel  $2 \times 5$ , vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestate ipsius 5, quæ tamen potestates sunt minores, quam

$n$ ; ponitur enim, fractionem  $\frac{p}{q}$  esse ad minimos terminos reductam, hoc est,  $p$ , &  $q$  nullum habere divisorem communem.

In alio quolibet casu fractio  $\frac{p \times 10^n}{q}$  num-

quam fieri poterit numerus integer  $r$ . At tamen quo major erit  $n$ , hoc est, quo plures erunt cyphræ in denominatore, eo ma-

gis fractio  $\frac{r}{10^n}$  accedet ad fractionem  $\frac{p}{q}$ . Si enim



enim  $p \times 10^n$  per  $q$  dividatur, quotus inventus  $r$ , qui minor erit, justo major fiet, si

unitate augeatur. Quare  $\frac{r}{10^n}$  minor est, quam  $\frac{p}{q}$ , &  $\frac{r+1}{10^n}$  major.

Quatuor Arithmenticæ operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione, qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulæ, qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc virgula in eadem linea verticali jacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt, vel ab invicem subtrahendæ. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat, quot erant in utraque fractione. Tandem si divisio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probe observandæ sunt; nam in quoto, & divisore simul totidem esse debent post virgulam notæ, quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Ad-

Additio .	Subtractio .
$\begin{array}{r} 23, 304 \\ 3, 9567 \\ \hline 149, 86 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49, 638 \\ 17, 16 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 175, 21207 \\ \hline \text{Multiplicatio.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 32, 478 \\ \text{Divisio.} \\ 8, 445 = 2, 6 \\ \hline 3, 22 \\ 6, 44 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 24 \ 70 \\ 49 \ 40 \\ \hline 73, 470 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2005 \\ 1932 \\ \hline 73 \end{array}$

Unum autem in divisione notandum est. Si nempe in divisore plures occurrant notæ decimales, quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adjunges, quot volueris cyphras; ita ut tamen notæ decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquæ decimales notæ haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in ex-

emplo divisionis præcedentis  $8, 445 = \frac{8445}{1000}$

&  $3, 22 = \frac{322}{100}$  Itaque dividi debet fra-

ctio prior per secundam; evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse, & hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper æqualem cyphrarum in divisore, & dividendo differentia. Generatim, quod multiplicationem spectat, si 20<sup>n</sup>

si  $10^m$  sit denominator fractionis unius decimalis, &  $10^n$  alterius; denominator producti erit  $10^{m+n}$ . Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales, seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in  $m+n$ . Contraria ratione in divisione denominator non erit  $10^{m+n}$ , sed  $10^{m-n}$ ; ideoque  $m-n$  exprimet numerum cyphrarum, quæ post virgulam in quoto scribi debent.

## C A P U T V.

### *De radicum extractione.*

I. **E**xplicavimus jam in Capite 2<sup>o</sup> quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicujus *potestas prima*, vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius  $a$  est  $a$ . Productum ex quantitate aliqua in seipsam dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*: ita  $a^2$  est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quæ vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia*, vel *cubus*, ita  $a^3$  est cubus ipsius  $a$ ; quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim si quantitas evehatur ad potestatem, cujus index est  $n$ , habebitur potestas gradus  $n$ . In hoc autem Capite præsertim considerabimus radicum quadratæ, & cubicæ extractionem; quod ut clare fiat, ipsam quadrati, & cubi formationem primum investigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis  $a + b$  ad quadratum evehenda, prodit  $aa + 2ab + bb$ . Jam ve-

Jacq. T. III.

C

ro



ro quadrati hujus formationem, seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii  $a + b$  continet 1°. Quadratum  $aa$  primæ partis  $a$ . 2°. Productum  $2ab$  ex duplo primæ partis in secundam. 3°. Quadratum partis secundæ, nempe  $bb$ . Simili modo si multiplicetur  $a + b + c$  per  $a + b + c$ , orietur quadratum  $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ . In hoc quadrato rursus considerandæ sunt partes singulæ; continet 1°. Quadratum  $a^2 + 2ab + b^2$  ex duobus primis terminis  $a + b$ . 2°. Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum

$= 2a + 2b \times c$ . Tandem continet quadratum  $c^2$  tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus, quam tribus terminis, composita; tales vero quantitates magis compositæ appellari solent *polynomialia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium  $a + b$  ad 3<sup>m</sup> potestatem evehatur, multiplicetur nempe quadratum  $a^2 + 2ab + b^2$  per  $a + b$ , prodit cubus  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . Cubi hujus partes singulæ sunt 1°. Cubus primi termini, nempe  $a^3$ . 2°. Productum ex quadrato  $a$  primi termini in triplum terminum secundum, scilicet  $3a^2b$ . 3°. Productum ex primo termino  $a$  in triplum quadratum secundi termini, nempe  $3ab^2$ . 4°. Cubus secundi termini scilicet  $b^3$ .

Simili modo operandum est pro trinomio  $a + b + c$ , invenieturque cubus  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ . In hoc autem cubo præter duorum primorum terminorum cubum, nem-

nempe  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , diligenter considerari debent aliæ partes. 1. Productum ex triplo quadrato duorum primorum terminorum in tertium terminum  $c$ , nempe

$3a^2c + 6abc + 3b^2c = (a^2 + 2ab + bb) \times 3 \times c$ . 2. Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet  $3ac^2 + 3bc^2 =$

$(a + b) \times 3 \times c^2$ . 3. Tandem tertii termini cubus, nempe  $c^3$ .

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, sive radicum extractio. Sit quantitas litteralis  $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ , ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix quadrata  $x$ , cujus quadrato subtracto remanent termini duo  $- ax + \frac{1}{4}a^2$ . Deinde sumatur duplum ipsius  $x$ , per quod dividatur secundus terminus  $- ax$ , quotus fit  $-\frac{1}{2}a$ , qui multiplicetur per  $ax$ . Tandem fiat quadratum quoti  $-\frac{1}{2}a$ , atque producta illa ex residuo  $- ax + \frac{1}{4}a^2$  subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est  $x - \frac{1}{2}a$ . Tota operatio patet ex numero præcedenti.

Cæterum si radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini post primam operationem velut unus terminus considerari debent, & reliqua peragenda, ut ante, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali  $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$ . Ex primo termino extrahatur radix cubica, quæ est  $c$ , cujus cubus  $c^3$  auferatur: remanent termini  $- 3c^2y + 3cy^2 - y^3$ . Jam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur ter-

C 2 mini

mini  $c$  triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus  $- 3c^2y$ , prodit quotus  $- y$ , qui erit secunda pars radice. Quia vero cubus quilibet continet cubum ex duobus primis terminis radice, sumatur cubus terminorum  $c - y$ , deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet; ac proinde radix accurata est  $c - y$ .

III. Ex demonstrationibus præcedentibus facile patet radicum extractio in quantitativis numericis.

Etrahenda sit radix quadrata, ut in præsentis exemplo. Numerum datum in classes divide, quarum singulae duas notas contineant, initio a postremis facto: nihil autem refert, siue unica tantum nota constet prima classis, siue notis duabus. Quare radicem veram, aut proximè veram numeri 38, quæ in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radice, & ejus quadratum 36 aufer ex 38. Residuo 2 adjuunge notas classis proximè sequentis 94, & hujus

*Exempl.*

38. 94. 89. (624, 09  
36

294

122

244

5089

1244

4976

11300

12480

0

1130000

124809

1123281

6719. &c.

novi numeri postrema nota neglecta, quæ re quoties duplum radice hætenus inventæ, siue 12, contineatur in 29, invenietur 2; scribe ergo 2 in radice, & ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet

50;



50; huic autem residuo adnecte notas classis proxime sequentis 89. Rursus contempta nona numeri postrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ, scilicet 124, contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 124 in 4, nempe 496, residuum est 112. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 112 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 112 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides; & habeatur numerus 624 tanquam prima pars radicis, cuius duplum sumatur, nempe 1248; dividaturque 1120 per 1248, quotus est 0, quare scribe 0 in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11200, remanent 11200. Huic residuo iterum addantur cyphæ duæ, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod dividatur 112000, scribaturque quotus 9 in radice, per quam multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1120000, residuum fit 6719. Operatio rursus continuari posset; sed satis patet methodus, cuius ope radicem proxime veram obtinere licet, & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium naturam.

In hujus operationis serie idem notare oportet, quod in divisione observatum est, nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis in-

#### 54 ELEMENTA ARITHMETICÆ.

ventæ non contineatur in numero, qui per illud dividendus est; postrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, & classis proximæ notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est, hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radice postremo inventæ auctum nota, quæ deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; in divisione totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; atque id in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema dividenda quantitatis nota prætereatur. Si contingeret, divisorem esse majorem: V. G. in præsentī exemplo si productum ex 2 in 122 subtrahi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime minor, & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radice inventæ scribatur radix nova, & deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsentī exemplo post duplum primæ radice 12 scribitur 2, totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2. Operationis ratio manifesta est; cum enim numerus 2 in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radice cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admo-

modum similis, & iisdem innititur principiis.

Extrahenda sit radix cubica, ut in præfenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas incipiendo a postremis notis, prima classis, quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu unicam continet. Quærat<sup>ur</sup> radix cubica numeri 5 proxime minor, quæ est 1. Hujus cubus 1 subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut hic factum vides. Deinde ita dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, & per illius triplum 300 dividatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret justo major, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea  $7 \times 7 = 49$ , &  $49 \times 10 = 490$ , postea  $490 \times 3 = 1470$ , quod scribe infra 2100. Tandem  $7 \times 7 \times 7 = 343$ , quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470, & 343; & summa 3913 auferatur ex numero 4305, residuum est 392, Demittatur classis tertia 472, & duæ primæ partes radicis, velut pars una, considerentur. Hæc autem pars, quæ est 17, æqui-

*Exempl.*

5.305.472. (174, 4  
1

4305

300

2100

1470

343

3913

392472

86700

346800

8160

64

355024

37448000.

C 4

valet



valet 170, si conferatur cum tertia parte quaesita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 86700 per 4, productum fit 346800, quod infra scribitur. Dicas deinde  $4 \times 4 = 16$ ;  $16 \times 170 \times 3 = 8160$ , quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illæ quantitates; quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si residuo addantur tres cyphræ, ut in præsentis exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa; illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratæ, & cubicæ, diximus, tot esse radicis partes, quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constant notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus; quadratum erit 100, quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quæ tres habeat notas, est 100, cujus radix quadrata est 10, quæ proinde duas continet notas; ac quanti-

tas

tas omnium maxima, quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata: & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere, evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens est, extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore, & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice superfedemus, ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum  $\sqrt{\phantom{x}}$  quod *radicale* appellant. Sic  $\sqrt{3}$  significat radicem quadratam numeri 3.  $\sqrt[3]{10}$  denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri, quos Arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur, ita  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt[3]{abc}$  significant radicem quadratam ipsius  $ab$ , & radicem

C. 5 cem

58 ELEMENTA ARITHMETICÆ  
 cem cubicam quantitatis  $abc$ . Sed com-  
 moditatis ergo radix secunda, vel quadra-  
 ta exprimi solet per  $\frac{1}{2}$ , radix cubica per  $\frac{1}{3}$ ,

ita  $a^{\frac{1}{2}}$ ,  $a^{\frac{1}{3}}$ ,  $a^{\frac{1}{m}}$  significant radicem qua-  
 dratam, cubicam, & radicem quamlibet  
 indeterminatam  $m$ . Ut autem clara ta-  
 lium expressionum notio habeatur, memi-  
 nisse oportet, quæ antea de exponentibus  
 breviter dicta sunt. Ponamus  $a = b$ ,

erit  $a^{\frac{1}{3}} = (bb)^{\frac{1}{3}}$ . Præterea in quanti-  
 tate  $(bb)^3$  exponens 3 indicat, quan-  
 titatem  $bb$  ter scribendam esse, ac proin-

de  $(bb)^3 = b^6$ . Igitur eadem ratione in quan-  
 titate  $(bb)^{\frac{1}{2}}$  exponens  $\frac{1}{2}$  designat, litte-  
 ram  $b$  dimidio minus sumendam esse, quam  
 in  $bb$ ; ac proinde semel tantum, quare

$(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ . Idem patet de  
 aliis quibuscumque exponentibus. Res autem  
 itota magis ac magis illustrabitur, explicatis  
 quatuor Arithmeticæ operationibus in quan-  
 titatibus surdis.

Quantitates surdæ adduntur, vel subtra-  
 huntur facillime, si ejusdem sint exponentis,  
 & eandem habeant sub signo radicali quan-  
 titatem. Si autem res non ita se habeat,  
 sæpissime contingit, quantitates surdas ejus-  
 dem ordinis ad eandem quantitatem sub  
 signo radicali posse revocari. Ita si addi,  
 vel subtrahi debeant quantitates radicales  $\sqrt{48abb}$ , &  $b\sqrt{75a}$ , prima per reductionem  
 mutatur in  $4b\sqrt{3a}$ , altera autem in  $5b\sqrt{3a}$ . Quare in 1º casu habebitur  $9b\sqrt{3a}$ ,



3a, in altero autem b  $\sqrt{3a}$ . Totum reductionis artificium in eo consistit, ut numeri sub signo radicali positi quærantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejusdem ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali, quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficientens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo + connectendæ, in subtractione autem signo — separandæ.

Demum multiplicantur, & dividuntur quantitates irrationales non secus, ac rationales, & producto, vel quoto idem, quod prius erat, signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeant  $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$ , productum erit  $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$ . Ita si dividi debeat  $ac\sqrt{bc}$  per  $a\sqrt{b}$ , erit

$$\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}.$$

Patet autem, in mul-

tiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo inclusæ; sic  $\sqrt{a_3c} \times \sqrt{a_3c} = a_3c$ .

Quoniam sæpe contingit, quantitates radicales ad eundem exponentem reducendas esse, observandū est, id facile præstari posse ex hætenus

demonstratis. Ita quantitates duæ radicales  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ , &  $\sqrt[n]{\frac{m}{d}}$  mutantur in  $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$  &  $\sqrt[n]{\frac{cn}{d^n}}$ ; quod

quod patet; nam quantitates illæ ad potestates  $n$ ,  $m$  respective evehuntur, & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem, illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat  $a^1$  per  $a^1$ , productum fit  $a^1 + a^1 = a^2$ . Si autem quantitas  $a^1$  ad secundam potestatem evehi debeat, habetur  $a^1 \times a^1 = a^2$ ; & generatim quantitas  $a^m$  ad potestatem  $n$  evecta fit  $a^{mn}$ . Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione divisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio per exponentis divisionem.

Ita  $\frac{a^6}{a^2} = a^6 - 2$ . At si ex  $a^6$  extrahenda sit

radix quadrata, erit  $a^{\frac{6}{2}} = a^3$ , & gene-

ratim pro divisione  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ; at

pro radicis  $n$  extractione habetur  $a^{\frac{m}{n}}$ . Si

quantitates sint simplices, brevius per exponentes, quam per signum radicale, exprimuntur.

V. Quantitates irrationales, sive incommensurabiles sæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitates, evidens est ex capite præcedenti, in quo demonstravimus, fractionem sive puram, sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer, cujus radix quadrata, cubica &c. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde hujus numeri radix est

est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cujuscvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione, vel numero existere necessum est partem aliquotam, quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura; ita  $\sqrt{2}$  non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas proprie non existit, eaque inveniri non potest. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio  $\frac{1}{4}$ , quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumptam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Rem arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum  $3 \times 3 = 9$ , & major quam 2, cum sit  $2 \times 2 = 4$ . Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 & 3; ac proinde si posset determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto, sed fieri non potest, ut fractio mixta per se ipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum, neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cujus radix non est numerus integer.

Schol. Secundæ dumtaxat, & tertiæ potestatis compositionem, ac resolutionem in præsentî Capite explicavimus; at rem ge-

nt.



neratim, & breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate considerabimus. Ex hæcenus explicatis manifestum est, eodem modo formari altiores cujuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem multiplicari debet cubus per suam radicem, & sic deinceps. Jam in singulis terminis exponentes, & coefficientes diligenter observemus. In potestatis cujuslibet compositione primus terminus a binomii cujuslibet  $a + b$  evehitur ad potestatem quæsitam V. G.  $a^2$  si potestas secunda fuerit. In aliis sequentibus terminis exponens quantitatis  $a$  per unitatem decrescit, & in ultimo termino evanescit. Ita in secunda potestate habetur  $2ab + b^2$ . Contra autem potestas termini  $b$  in primo termino non reperitur, sed in 2<sup>o</sup>. termino illius exponens est unitas, in 3<sup>o</sup>. termino est 2, & ita crescit per gradus, donec in ultimo termino exponenti potestatis quæsitæ æqualis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius  $a$ , crescunt exponentes quantitatis  $b$ , atque in utraque quantitate exponentium summa semper eadem est, & potestatis quæsitæ exponenti æqualis; quod quidem in potestate qualibet experiri licet. Ita potestas 6 binomii  $a + b$ , invenitur  $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ ; in qua observare est, exponentes quantitatis  $a$  decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis  $b$ , nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; summaque exponentium in utroque termino est semper 6. Jam superest, ut singulorum terminorum coefficientes observemus. Dividatur coefficientes

ciens præcedentis termini per exponentem ipsius  $b$  in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipsius  $a$  in eodem termino auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo, ubi termini sunt  $a^6$ ,  $a^5b$ ,  $a^4b^2$ ,  $a^3b^3$ ,  $a^2b^4$ ,  $ab^5$ ,  $b^6$ , coefficientis primi termini est unitas, coefficientis secundi est  $\frac{1}{2} \times 5 + 1 = 6$ , tertii termini coefficientis  $\frac{6}{2} \times 4 + 1 = 15$ , coefficientis termini quarti est  $\frac{15}{3} \times 3 + 1 = 20$ . Et simili modo inveniuntur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium, & coefficientium serie generatim exhiberi potest binomium  $a + b$  ad potestatem quamlibet  $m$  evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus,  $a^m$ ,  $a^{m-1}b$ ,  $a^{m-2}b^2$ ,  $a^{m-3}b^3$ ,  $a^{m-4}b^4$ , quæ series continuari debet, donec exponens quantitatis  $b$  evadat  $m$ . Coefficientes autem ex præcedenti regula hoc ordine progredientur 1,  $m$ ,

$$m \times \frac{m-1}{2}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, m \times \frac{m-1}{2}$$

$$\times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \text{ \& ita deinceps. Quare hæc habetur generalis formula } a + b \equiv a^m$$

$$+ m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} \times a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^{m-3} b^3 \text{ \&c. Simili modo}$$

$$\text{invenitur formula pro binomio } a + b \text{ ad potestatem } m \text{ evectum, hoc}$$

hæc solum observato discrimine, quod terminus debeat esse negativus, si exponentis quantitatis  $b$  sit numerus impar. Ita in cubo  $a^3 = 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  secundus, & quartus termini sunt negativi; ratio autem est evidens, cum negativa existente quantitate multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi posset pro trinomio  $a + b + c$ , ponendo  $a + b = n$ , & ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula, quæ potestatum compositionem exhibet, earum quoque resolutionem repræsentare potest. Ita radix quadrata binomii  $a + b$  nihil est aliud, quam potestas binomii  $a + b$ , cujus exponentis  $\frac{1}{2}$ , Quare ponatur in formula præcedenti  $m = \frac{1}{2}$ , habebiturque  $a + b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times b \times a^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times b^2 \times a^{\frac{1}{2}-2} + \dots$  &c. Si quantitas ex pluribus, quam duobus, constet terminis: E. G. si extrahenda sit radix quadrata ex quantitate  $1 + 2c + c^2$ . Fiat  $a = 1$ ,  $b = 2c + c^2$ . Eadem adhibita formula, factisque debitis reductionibus per vulgares Algebrae regulas, invenitur radix  $1 + c$ , ut oportet. Si autem quantitas proposita nullam habeat radicem accuratam, hujus formulæ ope ad radicem proxime veram licet accedere. Exempla duo breviter proponemus. Sit  $aa + b$  quadratum imperfectum, ex quo extrahenda sit radix quadrata, habebitur  $(aa + b)^{\frac{1}{2}} = aa^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times b \times aa^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times b^2 \times aa^{\frac{1}{2}-2} + \dots$



$$\frac{aa \frac{1}{2} - 2}{2} \&c. = a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} \&c. \text{ Si}$$

mili modo si ex cubo imperfecto  $a^3 + b$  extrahenda sit radix cubica, erit  $(a^3 + b)$

$$\frac{1}{2} = a + \frac{a}{3a^3} - \frac{b^2}{9a^5} \&c. \text{ Itaque ad ra-}$$

dicem proxime veram accedere possumus per series infinitas, dummodo series illæ sint *convergentes*, hoc est, si termini perpetuo decre-  
scant. Sit  $n$  ordo, quem terminus aliquis in præcedenti serie occupat, terminus ille inve-  
nietur esse ad terminum proxime sequentem,

$$\text{ut } 1 \text{ ad } \frac{b}{a} \times \frac{m - n + 1}{n}; \text{ ac proinde ut}$$

series sit convergens, oportet  $b \times (m - n + 1)$  esse semper minorem, quam  $na$ . Ita in exemplo proposito, ad habendam radicem quadratam proxime accuratam, terminus  $b \times (\frac{1}{2} - n + 1)$  positive sumptus minor esse debet, quam  $naa$ , existente  $n$  numero in-  
tegro. Simili modo ad habendam radicem cu-  
bicam quam proxime in exemplo præcedenti, oportet terminum  $b \times (\frac{1}{3} - n + 1)$  posi-  
tive sumptum semper minorem esse, quam  $na^3$ ; quod quidem diligenter observandum est in præcedentis formulæ usu.

## C A P U T VI.

### De Proportionibus.

I. **I**N memoriam revocanda est explicata cap. 10. rationis, & proportionis defi-  
nitio. *Ratio* dicitur eæ duarum quantitatum *habitus* qua ad se invicem referuntur; *geo-  
metrica* dicitur, si in ea relatione considere-  
mus,

68. ELEMENTA ARITHMETICÆ  
 esse producto ex summa primi, & ultimi in di-  
 midium terminorum numerum. Ita si numerus  
 terminorum dicatur  $n$ , erit omnium summa  
 $a + x \times \frac{n}{2}$ .

III. Cum differentia communis termino-  
 rum in progressionē arithmetica primum ter-  
 minum non afficiat; patet, hujus differentiæ  
 coefficientem in quolibet dato termino æqua-  
 lem esse numero terminorum, qui terminum  
 datum præcedunt. Quare in ultimo termi-  
 no  $x$  habebitur  $n - 1 \times b$ , nempe  $x = a +$   
 $n - 1 \times b$ . Igitur cum omnium terminorum  
 summa sit  $a + x \times \frac{n}{2}$ , ea quoque invenitur  
 $= \frac{2an + n^2b - nb}{2} = \frac{(a + nb - b) \times n}{2}$ . E.

G. Series arithmetica  $1 + 2 + 3 + 4 +$   
 $5 \&c.$  ad 100 terminos producta  $= 2 \times$   
 $\frac{100 + 10000 - 100}{2} = 5050$ . At si progres-

sionis primus terminus fuerit 0, erit progres-  
 sionis summa æqualis dimidio producto ex  
 ultimo termino in numerum terminorum.  
 Nam in hoc casu cum sit  $a = 0$ , summa ter-  
 minorum, quæ generatim exprimitur per  
 $a + x \times \frac{n}{2}$  in hanc abit  $\frac{nx}{2}$ . Unde patet,  
 summam numeri cujuslibet terminorum in pro-  
 gressionē arithmetica, cujus primus terminus  
 est 0, æqualem esse dimidio producto ex ter-  
 minorum numero in terminum maximum.

E. G. Progressio Arithmetica

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$$

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 =$$

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IV.

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis sit quoto ex duabus ultimis; quatuor illæ quantitates sunt *geometrice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales sunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates  $a$ ,  $ar$ ,  $b$ ,  $br$ . Ex ipsa proportionis geometricæ natura evidens est, productum ex terminis extremis æquale esse producto ex mediis; sic  $a \times br = ar \times b$ , ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometricæ proportionalis: multiplicando scilicet duos medios terminos, productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæsitus; ita datis tribus quantitatibus  $a$ ,  $ar$ ,  $b$ , invenitur quarta  $\frac{ar \times b}{a} =$ . At si proportio sit continua,

ita ut secunda quantitas sit primæ rationis consequens, & simul secundæ rationis antecedens, simili ratiocinatione patet, sumendum esse hujus quantitatæ quadratum, illudque per primam quantitatem esse dividendum. Hæc autem quantitas, quæ antecedentis, & consequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, talisque proportio ita exprimi  $\div a. b. c$ , nempe hoc scribendi modo significatur,  $b$  esse mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita designatur  $\div a. b. c$ . Patet autem, in hac proportionem summam extremorum æqualem esse termino medio bis sumpto.

Ex demonstratis de proportionem geometrica pendet vulgatissima Arithmeticæ operatio, quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet. Per hanc regulam datis tribus terminis invenitur quartus proportionalis. In hac autem ope-



operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem considerata est quantitas, quæ est ejusdem generis cum quantitate quæsitæ. Ex quæstionis natura intelligitur, an quantitas data sit major, vel minor quantitate quæsitæ; si major sit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatuum minima ad sinistram, alia autem ad dexteram collocari debet. Constituto autem convenienti terminorum ordine; jam ex præscripto regulæ productum ex secundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Hæc proponatur quæstio. Si triginta operarii dierum 12 spatio opus aliquod absolvant; quæritur necessarius operariorum numerus, ut idem opus 18 diebus absolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus, primum considerandus est numerus 30; statim autem vides, numerum illum datum majorem esse numero quæsitæ; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dexteram, atque ita operatio peragitur hoc modo  $18 : 30 = 12 : \underline{30 \times 12} = 20$ .

18

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportionem geometricam diversa ab Arithmetica inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione aliæ omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium, ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum, ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si summa terminorum

pri-

primi, & secundi refertur ad secundum, ut summa terminorum tertii, & quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, si terminorum primi, & secundi differentia ad secundum referatur, ut differentia tertii, & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale semper inveniat productum mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facile colligitur, rationum compositione proportionem non mutari. Ratio *composita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet productum ex earum antecedentibus ad quadratum ex consequentibus. Sint duæ proportionēs  $a : b = c : d$ ,  
 $f : g = m : s$

erit  $af : bg = cm : ds$ . Etenim productum extremorum  $afds$  æquale est productum mediorum  $bgcm$ . Et quidem  $a : b = c : d$ , ac proinde  $ad = bc$ . Præterea  $f : g = m : s$ , ideoque  $fs = gm$ , ergo  $ad \times fs = bc$

$\times gm$ . Simili ratione patet  $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$ . At-

que eadem valet demonstratio pro alio quolibet proportionum numero. Ratio ex duabus æqualibus composita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* &c. Hinc ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, est duplicata ejus, quam habent ipsæ quantitates ad invicem; ratio cuborum triplicata &c. Et contra ratio, quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ &c. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata* &c. rationis potentiarum *respectivarum*. At ratio, quæ intercedit inter radices



ces quadratas cuborum, hoc est ratio a  $\frac{1}{2}$  & b  $\frac{1}{2}$  dicitur *sesquuplicata*.

Si duæ quantitates ita inter se connexæ sint, ut si una sit dupla, tripla &c. altera etiam dupla, tripla &c. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa* sive *reciproca* istius. At si duæ quantitates ita sint invicem connexæ, ut altera crescat in eadem ratione, qua primæ quadratum, aut cubus &c. tunc illa ad hanc esse dicetur in ratione duplicata, triplicata &c. At si in eadem ratione una decrescit, qua crescunt alterius quadrata, vel cubi, dicetur esse in ratione hujus *reciproca* duplicata, aut triplicata &c. Harum rationum frequentissimus usus recurret in Physica.

VI. Ex mediorum, & extremorum producto pendet etiam universa progressionum geometricarum doctrina. In progressionem qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum semper æquale est producto ex secundo, & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo, & ultimo æqualiter distantibus. Sit progressio a, ar, ar<sup>2</sup>, ar<sup>3</sup>, in qua communis multiplicator, aut divisor *ratio communis* dici solet, sitque y ultimus terminus; erunt quatuor ultimi termini y,

$$\frac{y}{r}, \frac{y}{r^2}, \frac{y}{r^3}, \text{ ut patet ex natura progressionis geometricæ. Est autem } a \times y = ar \times$$

$$\frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3} \text{ \&c. Præterea}$$

sum-



summa progressionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis est summæ omnium terminorum, dempto ultimo per communem rationem multiplicato. Nam  $ar + ar^2 +$

$$ar^3 + \&c. \quad \frac{+y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y = r \times$$

$$a + ar + ar^2 \&c. + \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} .$$

Quare si progressionis summa dicatur  $s$ ; erit  $s - a = s - y \times r$ , hoc est  $s - a = sr - yr$ , vel  $sr - s = yr - a$ , &  $s = \frac{yr - a}{r - 1}$ .

Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat, qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur, res tamen magis fiet manifesta ex appendice, quam de æquationibus mox adjungemus. Porro cum exponens ipsius  $r$  ab ipso secundo termino perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur  $n$ , erit  $n - 1$  exponens ipsius  $r$  in ultimo termino; ac proinde  $y = ar^{n-1}$ , &

$$yr = ar^{n-1} + 1 = ar^n, \text{ \& } s = \frac{ar^n - a}{r - 1}.$$

Quare datis in progressionem geometricam primo termino, terminorum numero, & communi ratione, facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda

$$\text{fit summa seriei decrescentis } y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3}$$

$$\&c. + ar^3 + ar^2 + ar + a, \text{ posito terminorum numero infinito, ultimus terminus}$$

Jacq. T. III.

D

a fit

$a$  fit  $= q$ . Cum enim  $n$  sit infinitus, ac  
proinde & infinitus  $r^{n-1}$ ; erit  $a = \frac{y}{r^{n-1}}$

$= 0$ . Quare summa talis seriei est  $s = \frac{yr}{r-1}$

quæ est summa finita, quamvis numerus terminorum sit infinitus; ita series infinita est  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. = 2$ .

Schol. Ad progressionem arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in Physica sublimiori, sed rem breviter attingere nobis erit. Progressio quælibet geometrica hac formula potest repræsentari  $\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5 . \&c.$  in qua  $a$ , &  $q$  exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat  $a = 1$ , præcedens series abit in hanc  $\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5 . \&c.$  Inde autem duo colliguntur; 1<sup>o</sup>. Productum ex duobus quibuscunque hujus progressionis terminis pro exponente habet ipsorum exponentium summam. Ita productum ex  $q^1 \times q^4 = q^5$ . Quare si inveniendus proponatur in hac progressionem terminus, qui sit duorum aliorum producto æqualis, quærat terminus, cujus exponentis est ipsa duorum exponentium summa... 2<sup>o</sup>. Quotus ex duobus terminis emergens ipse est terminus, cujus exponentis est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur  $q^8$  per  $q_3$ , quotus est  $q^5$ . Quare si inveniendus proponatur terminus duorum aliorum quotus æqualis, quærat terminus, cujus exponentis æqualis est exponentium differentia.

Numeri alicujus *Logarithmus* appellatur expo-

ponens potestatis numeri denarii, qui sit numero dato æqualis. Ita si habeatur progressio geometrica  $\div 10^0. 10^1. 10^2. 10^3. 10^4. \&c.$  & infra scribantur eorundem terminorum valores  $\div 1. 10. 100. 1000. 10000 \&c.$  exponens 0 est logarithmus unitatis, exponens 1 est logarithmus numeri 10, & ita deinceps. Sed quia exponentes illi exhibent dumtaxat logarithmos numerorum integrorum in progressionem decupla 1, 10, 100, 1000 &c. necessum est præterea haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 &c. quare exponentibus præcedentibus additæ fuerunt decimales septem hoc modo.  $\div 10^0, 0000000. 10^1, 0000000. 10^2, 0000000. 10^3, 0000000. \&c.$  Jam vero quia exponentes illi semper sunt in progressionem arithmetica, ex dictis evidens est, valores numeri denarii ad illas potestates evecti, quarum indices sunt iidem exponentes, perpetuo manere in progressionem geometrica, atque eosdem exponentes esse horum numerorum logarithmos. Quare si continuo augeantur decimales illæ fractione

$$\frac{1}{100000000}$$

vel, quod idem est, si inter singulos primæ progressionis exponentes inserantur termini medii arithmetice proportionales 9999999, habetur nova progressio geometrica hoc modo  $\div 10^0.0000000. 10^0.00000001. 10^0.00000002. 10^0.00000003. \&c.$  in qua quidem progressionem observandum est, numeros lentissime crescere, cum p.<sup>us</sup> terminus sit 1, & 10000000, 2.<sup>us</sup> sit 10. Erit ergo terminus aliquis intermedius  $= 2$ , vel 3, vel 4 &c. Ita 2 inventus est  $=$  termino  $10^0.1010300$ ; 3  $=$

$$D \quad 2 \quad 10^0$$



10<sup>0</sup>. 4771213 ; 4 = 10<sup>0</sup>. 6020600. Quare exponentes illi sunt logarithmi numerorum 2, 3, 4 &c. Ex his principiis pendent vulgarium logarithmorum tabulæ ab 1 usque ad 100000; hæ autem majoribus numeris inveniendis inserviunt. Aliquæ accuratiores tabulæ logarithmos exhibent ex decem, imo & quindecim decimalibus constantes; sed ut plurimum septem sufficiunt, atque etiam quinque primæ decimales dumtaxat aliquando adhiberi solent. Ex hætenus demonstratis, & ex logarithmorum tabulis evidense est, logarithmos numerorum inter 1, & 10 incipere a 0; logarithmos numerorum inter 10, & 100 incipere ab 1, logarithmos numerorum inter 100, & 1000 incipere a 2; & ita deinceps. Primus ille terminus, qui est integer numerus exponentis, dici solet logarithmi *characteristica*, quo nomine appellatus fuit, quia indicat, quot notas contineat numerus dato logarithmo respondens. Manifestum enim est, numerum illum tot notas continere, quot unitates habet *characteristica* unitate auctas. Ita logarithmo 4, 8145605 respondet numerus quinque constans notis cum *characteristica* sit 4.

Commodissimæ sane sunt logarithmorum tabulæ. Etenim cum demonstratum sit, productum ex duobus numeris logarithmorum summæ respondere, eorum vero differentia respondere numerorum quotum, per solam additionem, & subtractionem compendiose absolvi possunt multiplicatio, & divisio. Sumantur datorum numerorum logarithmi; simulque addantur, numerus summæ respondens in logarithmorum tabulis erit producti logarithmus; contra autem logarithmorum dif-

differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inveniuntur numeri quæſiti. Simili ratione patet, numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si toties ſumatur numeri dati logarithmus, quoties per ſeipſum numerus multiplicandus proponitur: hoc eſt, logarithmus per exponentem potestatis multiplicari debet, & productum erit quæſiti numeri logarithmus. Contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæſitæ radicis logarithmus. Quamvis autem eam dumtaxat explicaverim logarithmorum formam, in qua logarithmus unitatis conſtituitur 0; multipliciter tamen variari poſſunt logarithmi. Et enim si duæ ſint. progreſſiones, quarum altera geometrica ſit, altera arithmetica, & ſub ſingulis primæ terminis ſinguli ſecundæ ſcribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum logarithmi. Sic termini progreſſionis inferioris ſunt logarithmi ſuperioris.

$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot \&c.$   
 $-4 \cdot -2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \&c.$

Semel autem conſtituta progreſſione geometrica cum ſuis logarithmis, utramque ſeriem licebit interjectis quotcunque terminis augere; ſi inter duos quoslibet progreſſionis geometricæ terminos medium geometricæ proportionale, & inter duos eorum logarithmos medium arithmetice proportionale conſtituas. Sic inter 2, & 4 medium proportionale eſt  $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.289 \&c.$ , cujus logarithmus eſt  $\frac{6+8}{2} = 7$ . Et eadem metho-

do ſemper inveniri poterunt infiniti alii logarithmi numerorum, qui vel integri ſint,  
D 3 . vel



vel ex integris, & fractis compositi, medios terminos inter duos proximos semper inquirendo. Aliud exemplum in vulgaribus logarithmorum tabulis proponemus. Ut haberetur Log. 9. quæsitus est medius proportionalis inter 1, & 10, sive inter 1. 0000000, & 10. 0000000, extrahendo ex 10. 0 &c. radicem quadratam veræ proximam 3. 1622777, cujus logarithmus est dimidijs Log. 10. Et iste quidem numerus major est aliquanto, quam 3, sed longe distat a 9. Itaque inter eum, & 10. 0 &c. iterum quæsitus est medius proportionalis extrahendo radicem numeri, qui oritur ducendo 10. 00 &c. in 3. 16 &c. & inventa est radix veræ quam proxima 5. 6234132. Hic numerus paulo major est, quam 5, & ejus logarithmus habetur, si summa logarithmorum 10. 00 &c. & 3. 16 &c. bisariam dividatur. Sic continua investigatione mediorum proportionalium inter duos numeros, qui sint proxime majores, vel minores, quam 9, devenitur tandem ad numerum, qui ne una quidem millionesima differat a 9, ejusque logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio, & patientissimo multorum annorum labore supputatæ sunt logarithmorum tabulæ. Cæterum in tabulis supputandis necesse non est, eam, quam demonstravimus, methodum adhibere, nisi in numeris, qui dicuntur *primi*. Nam in numeri, qui ex aliorum multiplicatione producuntur, satis est logarithmos coefficientium addere, ut habeatur logarithmus producti. Sic Log. 15 = L. 3 + L. 5, & Log. 27 = Log. 3 + Log. 9.



A P P E N D I X.

*De Æquationibus.*

I. **Æ**quatio dicitur propositio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interposito æqualitatis signo  $=$ . Æquatio valorem quantitatis alicujus repræsentat, si ex una æquationis parte habeatur quantitas sola quæsitæ, in parte autem altera occurrant quantitates, quæ omnes sint cognitæ. Ita si

habeatur  $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$ , notus est valor

ipsius  $x$ . Itaque in omni resolvenda æquatione id curandum est, ut nempe quantitas, cujus valor quæritur, in una æquationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitæ contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat æquationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis, seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem, seu secundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus, variisque numeris distinguemus.... 1°. Ex una æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc exemplo:  $5x + 50 = 4x + 56$ ;  $5x - 4x = 56 - 50$ , &  $x = 6$ .. 2°. Si quantitas incognita quantitibus aliis per multiplicationem, aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit  $3x + 12 = 27$ , erit  $3x = 27$

$$\begin{array}{r} D \quad 4 \quad - 12 \end{array}$$

$- 12 = 15$ , &  $x = \frac{15}{3} = 5$ . Sit autem  $-$   $x$

$+ 4 = 10$ ; erit  $x + 20 = 50$ , &  $x = 50 - 20 = 30 \dots 3^\circ$ . Proportio quælibet geometrica converti potest in æquationem, facta extremorum, & mediorum mul-

tiplicatione. Sit  $12 - x: \frac{x}{2} = 4: 1$ , erit

$12 - x = 2x$ ; quare  $3x = 12$ , &  $x = 4$ . Simili ratione proportio arithmetica in æquationem per additionem mutari potest  $\dots 4$ . Loco quantitatis cujuslibet in æquatione alia ejusdem valoris substitui potest. Sit  $3x + y = 24$ , &  $y =$

$24 - 9$ , erit  $3x + 9 = 24$ ,  $x = \frac{24 - 9}{3} =$

$5 \dots 5$ . Si pars æquationis quantitatem quæsitam continens signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, & altera pars æquationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit  $\sqrt{ax + b} - c = d$ , erit  $\sqrt{ax + b} = c + d$ , &  $ax + b = d^2 + 2cd + c^2$

$+ 2cd + c^2$ ; quare  $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 - b}{a}$

II. His præmissis permutationum regulis, quæ ex antea demonstratis facile intelliguntur, jam problema aliquod unius dimensionis solvendum ponemus. Et primo quidem quæstionis propositæ distincta habeatur notio, & singulæ conditiones attente considerentur. Si alicujus problematis conditiones ita expri-

man-

mantur, ut tot habeantur incognitæ, quot æquationes, poterit semper deveniri ad unicam æquationem, quæ unicam Incognitam habeat. Nam sint E. G. 10 æquationes, & totidem incognitæ; poterit conferendo primam cum secunda eliminari per regulas præscriptas una ex iis incognitis, inveniendò novam æquationem, quæ illa careat, tum idem præstari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur jam novem æquationes cum novem incognitis, quæ eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; & ita porro, donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot æquationes, quot incognitæ, problema dicitur *determinatum*, & unicam, vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ, quam æquationes, problema dicitur *indeterminatum*, & solutione habet infinitas. Æquatio  $3x + \frac{1}{4}x = 20$  est æquatio determinata; sed  $x + y = 12$  est indeterminata; etenim si ponatur  $x = 1$ , &  $y = 11$ ; vel  $x = 2$ , &  $y = 10$ , & ita porro, semper invenietur  $x + y = 12$ , ita ut infiniti sint valores, qui pro  $x$  &  $y$  positi numerum datum restituant. Regulas hæcenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis, quos annuatim impendit in sumptus, & post tres annos fit duplo ditior, quærantur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendæ, & enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam.



Anno primo	$x$
expendit num-	
mos 100. Ergo.	$x - 100$
Reliquum adau-	
get triente, qua-	
re	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
Anno secundo ex-	
pendit nummos	
100. Ergo.	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Reliquum adau-	
get triente. Qua-	
re	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
anno tertio ex-	
pendit 100. Er-	
go	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
Reliquum adau-	
get triente. Qua-	
re	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
Tandem fit du-	
plo ditior. Ergo	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x,$

Quæstio itaque ad æquationem reducitur, ex qua erui debent  $x$ . Utramque æquationis partem multiplica per 27, productum fit  $64x - 14800 = 54x$ ; auferas  $54x$ , residuum est  $10x - 14800 = 0$ , seu  $10x = 14800$ ; dividas per 10, habetur  $x = 1480$ . Quare habentur nummi sub initio, & ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad æquationem, quæ ipsum quantitatis incognitæ quadratum, & præterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus hac regula utendum est. Singulos æquationis terminos,

nos, quæ incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas, ita ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis quantitati incognitæ præfixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis, quæ incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, & deinde per regulas præscriptas, quantitatis incognitæ valor eruetur. Ponamus  $y^2 + ay = b$ ; addatur hinc, & inde quadratum dimidii coefficientis  $a$ , erit  $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$ ; extractaque radice fiet  $y + \frac{a}{2} = \pm$

$\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$ , & tandem  $y = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$ . Diligenter observandum est, radici qua-

dratæ præfixum fuisse signum  $\pm$  hoc est,  $+$ , vel  $-$ . Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis, ut  $a^2$ , potest esse  $+a$ , vel  $-a$ , ideoque  $y + \frac{a}{2} = + \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$ , vel

$- \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$ ; cum  $- \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \times - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$  restituat quadratum  $b + \frac{a^2}{4}$ ,

non secus ac facit  $+ \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \times + \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$ . Quare æquationes quadraticæ

duas admittunt solutiones. Sic in præsentī exemplo duo sunt valores radice  $y$ , unus

nempe  $y = + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$ ; alter au-

tem  $y = - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$ . At quoniam

positiva sunt omnium quantitatum quadra-  
ta, hinc patet, quantitatis negativæ radicem  
esse impossibilem, seu assignari non posse,  
quæ ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando con-  
tingit, æquationes nullam solutionem admit-  
tere. Exemplo sit  $y^2 - ay - 3a^2 = 0$ ;  
erit  $y^2 - ay = - 3a^2$  &  $y^2 - ay +$   
 $\frac{a^2}{4} = - 3a^2 + \frac{a^2}{4} = - 11a^2$ ; extractaque

radice habebitur  $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{- 11a^2}$ ,

&  $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{- 11a^2}$ . Ex quibus manife-

stum est, duos valores radices  $y$  esse imagina-  
rios, cum assignari non possit radix quanti-  
tatis  $- 11a^2$ . Si ergo in solutione proble-

matum deveniatur ad quantitates imaginarias,  
signum est admodum manifestum, vel proble-  
ma esse impossibile, vel adhibitam esse me-  
thodum, quæ aliquid impossibile involvit,  
prorsus ut fit in argumentatione, dum res ad  
absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ, quæ eandem sub  
signo radicali quantitatem habent, ut  $\sqrt{-a}$ ,  
 $\sqrt{-a}$  per multiplicationem efficere possunt  
productum reale, in quo nullum superfit si-  
gnum radicale, dummodo radices illæ nume-  
ro pari semper multiplicentur. Etenim eva-  
nescere non potest signum radicale, nisi ter-  
minus hoc signo affectus multiplicetur per  
aliud terminum, qui idem signum radicale  
habeat, & eandem quantitatem signo inclu-  
sam. Jam vero ita sublato signo radicali, si  
productum ex prima multiplicatione per idem



signum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, & ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium  $x - a - \sqrt{-b}$ , evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum quoad signum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex  $x - a - \sqrt{-b}$  in  $x - a + \sqrt{-b}$  delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur  $xx - 2ax + aa + b$ ; in hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino reali in  $\sqrt{-b}$  sese mutuo signis contrariis elidunt; atque hinc patet, terminum  $b$ , qui continet productum ex duobus radicalibus  $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$ , esse necessario positivum. Itaque quantitatuum imaginariarum frequens usus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatuum, quæ ex realibus, & imaginariis sunt mixtæ, realis esse potest; ita quantitatuum  $3 + \sqrt{-1}$ , &  $8 - \sqrt{-1}$  summa est realis, nimirum  $11$ , atque etiam realis est differentia, nempe  $5$ .

V. Æquationes omnes secundi gradus representari solent hac formula  $x^2 - px = q$ , in qua  $p$ , &  $q$  designant quantitates quaslibet vel positivas, vel negativas. Inde autem statim concluditur  $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$ .

Hinc autem difficultates aliquæ suboriri possent ex præcedentibus facile explicandæ.

Quæ.

Quæri etenim potest, cur quantitas positiva  $x$

$$- \frac{p}{2} \text{ æqualis fiat negativæ } - \sqrt{\frac{pp}{4} + q}.$$

Requidem vera duo quadrata æqualia præbent æquales radices, sed radices illæ ejusdem signi esse debent. Etenim ex eo, quod  $4 = 4$ , concludi non potest  $2 = -2$ . Præ-

terea  $\frac{p}{2} - x$  tam est radix ipsius  $xx - px +$

$\frac{pp}{4}$ , quam  $x - \frac{p}{2}$ . Quare scribendum videretur

$$+ x \pm \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}.$$

Has difficultates facile solvemus, si observetur, hanc ultimam æquationem in quatuor sequentes resolvi pos-

$$\text{se, } x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}; \quad x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q};$$

$$\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}; \quad \frac{p}{2} - x = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q};$$

$$\sqrt{\frac{pp}{4} + q}.$$

Duæ ultimæ equationes conveniunt omnino cum duabus primis; quare satis est duplex signum  $\pm$  in una æquationis generalis parte adhibere, ut fieri solet. Præterea æquationis resolutio hoc modo institui posset.

Radix quadrata æquationis  $xx - px + \frac{pp}{4}$

est  $x - \frac{p}{2}$ , si  $x$  sit major quam  $\frac{p}{2}$ ; fitque  $\frac{p}{2} - x$ , si  $x$  sit minor, quam  $\frac{p}{2}$ . In 1.º ca-

su habetur  $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$ ; in altero autem  
erit

erit  $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$ . Hi ergo sunt

duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite*, & obscure enuntiantur hoc modo  $x - \frac{p}{2} = \pm$

$\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$ . Si haberetur  $xx + px = q$ ,

per ratiocinationem præcedentem invenitur

$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$ , sola nempe radix

positiva; tum vero inutilis est radix negativa, cum problematis solutionem non præbeat. Hæc tamen radix haberetur quoque, mutata æquatione per regulas explicatas:

proditet nempe  $xx - px = q$ , &  $\frac{p}{2} - x$ ,

vel  $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$ . Hac igitur me-

thodo radices positivas necessarias a superfluis, veras a falsis separare liceret.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea duo quæcumque luminaria conjungente punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto æquali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur  $a$ , sitque illuminationis ratio, ut  $m$  ad  $n$ ; præterea dicatur  $x$  distantia minoris luminaris a puncto quæsito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto  $a - x$ . Jam ponatur, luminarium effectus, seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata di-

stan-



stantiarum a puncto lucido, ut vulgo statuitur a Physicis; sumptis distantiarum qua-

dratis, erunt intensitates lucis, ut  $\frac{1}{xx}$  &

$\frac{1}{xx - 2ax + aa}$ . Res ita se haberet, si æqualia

forent luminaria; at quia (ex hypoth.) lucis quantitates absolutæ sunt, ut  $m$  ad  $n$ ; e-

runt luminarium effectus, ut  $\frac{m}{xx}$  ad  $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$ .

Itaque ut habeatur punctum quæsitum, instituenda est æquatio inter  $\frac{m}{xx}$  &  $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$ ,

ex qua per reductionum regulas eruitur  $xx$

$+ \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$ , & addito, ut moris est,

dimidii coefficientis quadrato, habetur  $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{n-m^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{n-m}$ . Hu-

jus æquationis radices duæ sequenti formula

exprimuntur, ut patet, nempe  $x = \frac{am}{n-m} \pm a \sqrt{\frac{mn}{n-m}}$ , vel  $x = \frac{a}{n-m} x (-m \pm \sqrt{mn})$ .

Ex his evidens est, unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo  $-$  afficiatur, jam quantitas tota fit negativa; si autem afficiatur signo positivo  $+$ , jam quantitas  $-m + \sqrt{mn}$  erit positiva, cum sit (ex

(ex hypoth.)  $n$  major, quam  $m$ ; ideoque  
 $\sqrt{mn}$  major quam  $m$ .

Supereſt ut radicis negativæ uſum explicemus. In memoriam revocanda ſunt, quæ de quantitativis negativis jam dicta ſunt, ſcilicet quantitates negativæ ſecundum directionem positivis oppoſitam ſumendas eſſe. In præſenti problemate quantitatis  $x$  valor negativus facile intelligetur, ſi obſervabimus, punctum quæſitum a nobis conſiderari tanquam inter duo luminaria conſtitutum. At ſi attendatur ad alterius caſus poſſibilitatem, ponendo nempe punctum quæſitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit positivus. Et quidem ſi diſtantiæ puncti a minori luminari dicatur  $x$ , ut ante, erit luminariſ majoris diſtantiæ  $a + x$ , quadrata autem diſtantiarum erunt  $xx$ , &  $aa + 2ax + xx$ ; quæ per conditiones problematis in æquationem reducta præbent  $maa + 2amx + mxx = nxx$ ; reſoluta æquatione habetur  $x = \frac{a \times m \pm \sqrt{mn}}{n - m}$ , valor  $a \times$

$\frac{m + \sqrt{mn}}{n - m}$  erit positivus, hicque ſolus problemati ſatisfaciet in caſu propoſito. Alter autem valor negativus  $\frac{a \times m - \sqrt{mn}}{n - m}$  ſi-

gnificat, ſumendam eſſe directionem oppoſitam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, ſed in ipſa linea jungente conſtituendum eſſe. Problema ad caſum particularem transferamus. Ponatur  $n = 4m$ : præ-

cedens formula  $x = \frac{a}{n-m} x - m \pm \sqrt{mn}$

in hanc abit  $x = \frac{a}{3} x \pm 2 - 1$ . Quare duplex valor radicis  $x$  erit  $+\frac{1}{3}a$  &  $-a$ , qui quidem duo valores determinant puncta duo, quæ problemati æque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo major erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia æqualis erit ipsi luminarium distantia. Facile autem sine ullo Algebrae auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quæ vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quæ de quantitativis negativis breviter antea attigimus. Hæc sunt Arithmeticæ, & Algebrae elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras Institutiones Physicas satis esse iudicavimus.

F I N I S.

ELE-



# E L E M E N T A <sup>91</sup> G E O M E T R I Æ

## P R O Æ M I U M .

*De definitione & divisione Geometriæ.*

I. **G** *Geometria* est scientia magnitudinum, *solidorum* nempe, *superficierum*, & *linearum*. Solidum est magnitudo in longum, latum, & profundum extensa. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat; illæ tamen seorsim considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei, & lineæ. Superficies est magnitudo tantum in longum, & latum extensa. Linea autem est magnitudo extensa tantum in longum. Et requidem ipsa itineris longitudinem nobis repræsentamus, non attenta ejus latitudine, & planitie latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes. Denique si concipiamus lineæ terminum, cujus nulla pars sit, nulla extensio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriæ definitionem id primum ostendi debet, quomodo per varios abstractionis gradus ex corporis *physici*, & prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici*, & simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei, & lineæ notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus.

Ne-

Neque methodo satis philosophica utuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, & punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione nascitur divisio Geometriæ in Geometriam linearum, superficierum, & solidorum. Quare tres erunt Geometriæ sectiones. 1.<sup>a</sup> De lineis, 2.<sup>a</sup> De superficieribus. 3.<sup>a</sup> De solidis. In prima sectione linearum positionem, illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cujus utilitas est maxima in considerata linearum rectarum mutua positione. Quare ad Geometriæ Elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates, & mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum, illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat, ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis Capitibus distinguamus.

II. Lineam repræsentare solent Geometriæ tanquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum est, ita simplicem esse lineæ rectæ, & curvæ notionem, ut ad clariorem ideam, magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam. Cæterum inde evidens est, datis in linea recta punctis duobus datam esse hujus lineæ positionem, ita ut unica dumtaxat recta per hæc duo puncta transire possit.



fit. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet omnium superficierum eisdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ *peripheria* dicitur, sive *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductæ æquales sunt inter se; circumferentiæ pars quælibet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, & utrinque terminata *diameter* dicitur; rectæ autem a centro ad circumferentiam ductæ *semidiametri*, vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur. Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice, tanquam centro, descripti. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi æquales esse angulos, si æquales sint arcus ex angulorum vertice, & eodem radio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur, nisi arcum unum altero esse duplo majorem. Itaque anguli natura in majori, aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam consistit. Igitur angulus cum sit mera linearum inclinatio, & apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, cum id dici possit dumtaxat de quantitate comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero  
me-



— mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta; atque hinc factum est, ut anguli mensura cum circuli arcu comparaverint Geometræ. Circulus dividi solet in partes æquales 360, quæ *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividitur in 60 secunda, & sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant  $35^{\circ}$ ,  $25'$ ,  $36''$ ,  $42'''$ , lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc & inde æquales; angulus hujusmodi dicitur *rectus*. At si recta una super alteram cadens duos angulos efficiat, ita ut unus sit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio, ut eandem semper a se invicem servant distantiam, evidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem, ac proinde in infinitum etiam protractæ non concurrent, seu angulum non efficient: tales lineæ dicuntur *parallele*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens est, duas lineas rectas in unico dumtaxat puncto concurrere posse; cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambæ rectæ, quod est contra hyp. Id pro axioma habent Geometre-

metræ, & ita exprimi solet: *Duæ rectæ segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt*. Itaque tres saltem lineæ requiruntur, ut spatium undique claudatur. Spatium undique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineis, quæ ejusdem latera vocantur. Hæc autem latera si fuerint æqualia, triangulum dividitur *æquilaterum*; si duo tantum latera sint æqualia, triangulum vocatur *isosceles*; demum si latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *scalenum* dicitur. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest; si unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur; *acutangulum*, si omnes habeat angulos acutos; & tandem *obtusangulum*, si angulum obtusum habuerit.

VI. Figura quatuor lateribus terminata *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia sint figuræ latera, & ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at simpliciter *rectangulum* vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus majora sint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogramum* appellatur figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti. Si figura quadrilatera sit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur; & *Rhomboides* vocatur, si latera opposita dumtaxat æqualia habuerint. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis, quæ jam enumeravimus diversum, *Trapezium* appellatur. Sed figura *polygona* dicitur, quæ pluribus, quam quatuor, lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem &c., figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum* &c. dici solet.

let. Figura autem polygona *regularis* est, quæ æquilatera, & æquiangula est.

VII. Axiomata, & postulata plurima præmittere solent Geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim est axiomatum de toto, & parte utilitas, ut intelligamus, dimidiam lineam tota minorem esse? Ecqui statim non videt, rectam lineam produci posse; circulum dato intervallo posse describi, & reliqua hujusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superpositione* legitur, simplicissimum quidem, & in universa Geometria utilissimum, quod sine aliqua explanatione prætermittere nolumus. Dicunt nempe, *ea esse æqualia, quæ sibi mutuo superimposita perfecte congruunt*. Principium illud *superpositionis* non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus, artifex mesuram aliquam datæ longitudini applicat, ut inde veram longitudinem concludat; talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est prædictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, & deinde concludamus. 1.º Ex partium datarum æqualitate ipsam earundem partium convenientiam, sive *coincidentiam* ... 2.º Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde & perfectam duarum figurarum æqualitatem, & similitudinem. Itaque *superpositionis* principio intelligenda non est dumtaxat mutua figurarum applicatio, sed partis unius alteri parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Unde evidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inæqualitatem. Cæterum hoc unico prin-



principio cum angulorum mensura per arcus circulares conjuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quæ ad elementarem linearum Geometriam pertinent.

## S E C T I O I.

*De Geometria linearum.*

### C A P U T I.

*De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullo tamen spatio, seu nulla figura terminatis.*

**PROP. I.** RECTA QUÆLIBET IN RECTAM CADENS VEL DUOS ANGULOS EFFICIT RECTOS, VEL DUOBUS RECTIS ÆQUALES. Etenim recta insinat perpendiculariter, ut GE, vel oblique, ut RE (Fig. 1.) In 1. casu patet (ex def.) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumpti æquales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est duobus rectis.

**COR. I.** Producta linea RE in O, simili ratione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis æquales esse; ac proinde duæ rectæ sese invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Jam centro E describatur circulus; mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est gradus 360. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiæ, nempe 90. gradus.

**COR. II.** Rectæ GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem*  
Jacq. T. III. E cem

*cem oppositi*. Illos autem angulos æquales esse, manifestum est; cum sit dimidium peripheriæ RFO æquale dimidio peripheriæ GFH; sublata autem communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO æquales inter se.

COR. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quælibet G, E a punctis duobus quibuslibet, ut C, F æqualiter distent, hoc est, si  $GC = GF$ , &  $CE = EF$ . Etenim puncta duo E & G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde cum duo puncta lineæ rectæ positionem determinant (ex def.) æqualis est rectæ totius GE hinc & inde ad rectam CF inclinatio; ideoque ob angulos utrinque æquales recta GE perpendicularis est ad CF. Patet autem, puncta C & F sumi posse pro arbitrio inter CE, & EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato duci potest ad eandem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, & dato quolibet æquali intervallo Ec, Ef describantur arcus circuli sese invicem secantes in g: recta per g, & E ducta erit perpendicularis quæsitæ ob distantias gc, gf, & Ec, Ef æquales.

Si punctum h extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h sumantur æqualia intervalla hc, hf, deinde ex punctis c & f, tanquam centris, & eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque hg, hæc erit perpendicularis ob æquales hc, hf, & gc, gf distantias. Evidens autem est, in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Unica enim



enim est recta transiens per punctum E, vel h, quæ cum recta CF æquales hinc & inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quæ ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam; cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte, quam ex alia: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est, ex puncto dato ad lineam datam unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta cf in duas partes æquales dividenda proponatur. Ex punctis c & f tanquam centrīs, & eodem radio describantur arcus circuli sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis, & sumpto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in h, recta hg dividet cf æqualiter in E, ut patet; cum singula puncta rectæ gh æqualiter distent a punctis c & f: ac proinde  $Ec = Ef$ .

PROP. II. Si lineæ AB, DC sint parallelæ (Fig. 2.) erit 1.º ANGULUS OFD, QUI EXTERNUS DICITUR, ÆQUALIS ANGULO OGB, QUI INTERNUS, ET OPPOSITUS VOCATUR. 2.º ÆQUALES ERUNT ANGULI BGF, GFC, QUI DICUNTUR ALTERNI, 3.º ANGULI INTERNI, ET AD EAMDEM PARTEM POSITI DFG, FGB ÆQUALES ERUNT DUOBUS RECTIS. Cum lineæ parallelæ eodem inter se ubique distent intervallo (ex def.), evidens est, eandem fore parallelæ utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD æqualis est angulo OGB: quod erat i.º. Præterea cum angulus GFC æquetur angulo

E 2

DFO



DFO ad verticem opposito ( cor. 2. prop. 1. ); erunt etiam æquales anguli BGF, GFC: quod erat 2<sup>um</sup>. Tandem cum anguli OFD, GFD æquentur duobus rectis ( prop. 1. ); æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat 3<sup>um</sup>.

Viceversa si angulus OFD æqualis sit interno, & opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectæ illæ parallelæ sunt inter se. Rursus si æquales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul æquales sint interni ad eandem partem positi BGF, GFD; angulus externus DFO semper æqualis erit angulo interno, & opposito BGF; ac proinde rectæ AB, CD erunt parallelæ. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones necessario nexu inter se conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK parallelæ sint eidem rectæ CD, erunt etiam inter se parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectæ CD ad eandem.

COR. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectæ AB; ex quolibet hujus puncto G ducatur recta GFO, & fiat angulus OFD æqualis angulo OGB, descriptis nempe ex punctis O, F, tanquam centris, & eodem radio arcubus æqualibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi AB.

CA-

## C A P U T II.

*De linearum rectarum respectu circuli  
positione.*

**PROP. I.** DUCTA RECTA FM AD CIRCUMFERENTIAM UTRINQUE TERMINATA, QUÆ CHORDA DICITUR (Fig. 3.); RECTA EP EX CENTRO CIRCULI AD CHORDAM PERPENDICULARITER DUCTA EAMDEM SECAT IN DUAS PARTES ÆQUALES. Cum enim recta EP e centro ducatur, punctum E æqualiter distat a punctis extremis chordæ F & M, (ex defin.). Præterea cum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta æqualem habent ab iisdem extremis distantiam (cor. 3. prop. 1.) Quare punctum P æqualiter etiam distat a punctis F & M.

Et viceversa recta quælibet EP per centrum transiens, & chordam FM æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim cum recta EP chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter distat ab extremis F & M: quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E æqualiter distat ab extremis F & M. Quare puncta P & E æqualiter distant a punctis F & M; ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque æqualiter dividat, recta illa transit per centrum. Cum enim chordam dividat æqualiter; punctum P æqualiter distat ab extremis F & M. Præterea cum sit perpendicularis, singula illius puncta  
E 3 æqua-



æqualiter etiam distant a punctis  $F$  &  $M$ . Erit ergo centrum  $E$  hujus perpendicularis punctum aliquod.

**PROP. II.** Si recta  $EH$  transiens per centrum dividat æqualiter chordam  $FM$ , æqualiter quoque dividet arcum  $FHM$ . Etenim cum singula puncta rectæ  $EH$  æqualiter distant a punctis  $F$  &  $M$ , æqualis erit puncti  $H$  ab extremis  $F$  &  $M$  distantia. Quare si semicirculus  $GMH$  semicirculo  $G FH$  imponatur, congruet punctum  $M$  cum puncto  $F$ , & ob punctum  $H$  commune congruent & chordæ  $HM$ ,  $FH$ , & artus iisdem chordis subtensi.

**COR. I.** In eodem circulo, vel in circulis æqualibus chordæ æquales æqualibus arcibus respondent, inæquales autem arcibus inæqualibus. Præterea chordæ æquales æqualiter distant a centro, chordæ autem inæquales distant inæqualiter; quod evidens est ex *superimpositionis* principio. Nam chorda æqualis cum æquali chorda semper congruet, nec cum chorda inæquali congruere unquam poterit.

**COR. II.** In eodem semicirculo, vel in semicirculis æqualibus, quo majores sunt, vel minores arcus, eo majores, vel minores sunt chordæ, & centro magis, vel minus proximæ. Viceversa quo majores sunt, vel minores chordæ, & centro magis, vel minus proximæ, eo etiam majores sunt, vel minores arcus subtensi.

**COR. III.** Ducta chorda  $FM$  diametro  $AB$  parallela intercipit æquales arcus  $AF$  &  $BM$ . Etenim, cæteris manentibus ut ante, arcus  $AH =$  arcui  $BH$ , & Arcus  $FH =$  arcui  $HM$ : quare demptis arcibus æqualibus



libus remanet  $AF = BM$ . Evidens est, eandem esse demonstrationem, si parallela  $NQ$  ad oppositas diametri partes jaceat; erit nempe arcus  $FN =$  arcui  $MQ$ .

COR. IV. Si ponatur, rectam  $NQ$  motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo  $N$  &  $Q$  coeant in  $G$ ; chorda  $NQ$  abit in *tangentem*, quæ nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est, in hoc etiam casu esse  $GN = GQ$ .

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet, qua ratione per tria data puncta circulus describi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ, quæ jungant tria puncta data, hæ erunt chordæ circuli quæsitæ. Quare ductis perpendicularibus, quæ chordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis transit per centrum, quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione, dato circuli arcu, centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datæ in duos æquales arcus dividi potest. Ducatur enim chorda arcum datum subtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur; eadem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, æqualiter in duas partes dividet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet, facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, & ita deinceps, secundum terminos progressionis geometricæ duplæ; sed per Geometriam elementarem angulus in tres partes æquales dividi non pot-

est: atque hæc est anguli *trisectio* a Geometris per *circinum*, & *regulam*, ut dicunt, hoc est, per lineæ rectæ, & circuli constructionem frustra quæsitæ. Demonstrant enim Geometræ, problema illud ad tertii gradus æquationem necessario pertinere, quæ quidem æquationes per solum circulum construere non possunt. Neque ob eandem rationem per sola Geometriæ elementa angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9 &c. Talis enim divisio pro diverso partium æqualium numero ad altiores æquationum gradus assurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse volumus.

**PROP. III.** RADIUS EG IN PUNCTO CONTACTUS G AD TANGENTEM PERPENDICULARIS EST. Etenim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. 4. prop. 2. hujus), radius EG minima est tangentis a centro distantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.)

Viceversa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum sit EG minima rectæ RT a centro E distantia, alia quælibet puncta rectæ RT magis distant a centro, quam punctum G; ergo singula puncta præter G extra circumferentiam jacent.

**COR. I.** Recta circumferentiam tangit in unico puncto, cum ex centro E ad rectam datam unica perpendicularis duci possit, (cor. 4. prop. 1. cap. 1.)

**COR. II.** Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG erectaque in G perpendiculari RT.

**COR. III.** Ad punctum datum in circum-

cumferentia unica tangens duci potest (loc. cit.); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quælibet, hæc coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

**COR. IV.** Si duo circuli  $GNA$ ,  $GOQ$  eandem habent tangentem; recta  $HG$  eidem perpendicularis per utriusque centrum, puta  $E$  &  $P$  transibit. Jam vero si ducatur  $ES$ , jungaturque  $PS$ , quæ producta secabit in  $O$  circulum  $GOQ$ , & in  $R$  tangentem  $RT$ : erit semper in triangulo  $ESP$  latus  $PS$  minus duobus reliquis  $ES$ ,  $EP$  (ex def. lineæ rectæ). Quare cum radii  $ES$ ,  $EG$  æquales sint, erit recta  $PS$  minor quam  $PG$ , sive  $PO$ . Ergo quodlibet punctum  $S$  circuli  $GSF$  erit intra circulum  $GOQ$ ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto  $G$ , in quo scilicet rectam  $RT$  tangunt.

**SCHOL.** Cum inter tangentem, & circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Hujus propositionis utilitas est in Physica, ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem, concertationesque maximas excitavit, nempe angulus contactus, quem facit arcus cum tangente, ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Hujus autem paradoxii geometrici causam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Et enim quemadmodum infinitæ lineæ nunquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quan-



titates ratio potest assignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *Logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva, & tangente comprehensi, nullum dubium est; quin spatium illud comparari possit cum portione finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse, cum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione, quæ arbitraria omnino est, semel constituta, & explicata, jam nihil difficultatis superesse potest. Et requidem ipsa de solo nomine hic litigari demonstrat summa Geometrarum consensus circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit, angulum contactus & minorem esse quovis rectilineo, & in infinitos curvilineos dividi posse.

PROP. IV. ANGULUS BAD TANGENTE BA, ET CHORDA AD COMPREHENSUS HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM AFD. Etenim ducta per centrum C diametro EG chordæ AD parallela (Fig. 4), ductaque alia diametro FF eidem chordæ perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente, & radio comprehensus (prop. præc.) itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus BAD = BAC = DAC,

DAC, vel  $\angle$  ACG ob parallelas DA & EG; quare cum ACG pro mensura habeat arcum AG, erit  $\angle$  BAD  $=$   $\angle$  FAG  $\Rightarrow$  AG  $=$  FA  $=$   $\frac{1}{2}$  AD.

PROP. V. ANGULUS CAD (Fig. 5.) AD CIRCUMFERENTIAM HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM CD LATERIBUS AC & AD INTERCEPTUM. Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB, summa trium angulorum BAC  $+$  CAD  $+$  DAE  $=$   $180^\circ = \frac{1}{2}$  AC  $+$   $\frac{1}{2}$  CD  $+$   $\frac{1}{2}$  DA. Sed angulum BAC metitur  $\frac{1}{2}$  AC & angulus EAD  $=$   $\frac{1}{2}$  AD (ex prop. præc.): ergo angulus CAD  $=$   $\frac{1}{2}$  CD.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem majorem intercipit, uterque chorda subtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6. 7.) vel intra, vel extra circumulum pro mensura habet  $\frac{1}{2}$  BD  $+$   $\frac{1}{2}$  CE pro angulo intra circumulum, vel  $\frac{1}{2}$  BD  $-$   $\frac{1}{2}$  bC pro angulo extra. Per E agatur chorda EF (Fig. 6.) rectæ AD parallela; erit angulus BEF  $=$  BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est  $\frac{1}{2}$  BF, &  $\frac{1}{2}$  BF  $=$   $\frac{1}{2}$  BD  $+$   $\frac{1}{2}$  DF, & DF  $=$  CE (cor. 3. prop. 2.). Ergo  $\frac{1}{2}$  BF  $=$   $\frac{1}{2}$  BD  $+$   $\frac{1}{2}$  CE.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente Ab & secante AD interceptus  $=$   $\frac{1}{2}$  Db  $-$   $\frac{1}{2}$  bC. Si enim circa punctum A revolyi intelligatur recta AB, donec tangens.

E. 6. eva-

evadat in b, puncta A & B convenient in b. Simili ratione angulus dAb inter duas tangentes Ad & Ab comprehensus pro mensura habet  $\frac{1}{2}$  dFb —  $\frac{1}{2}$  dCb.

### C A P U T III.

*De lineis rectis, quæ spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.*

**PROP. I.** IN TRIANGULO QUOLIBET SUMMA TRIUM ANGULORUM ÆQUALIS EST DUOBUS RECTIS. Etenim per tres angulorum vertices describatur circulus, (cor. 5. prop. 2. cap. 2.) ; triangulum erit inscriptum circulo, cujus chordæ erunt tria latera; anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (prop. 5. cap. 2.). Quare trium angulorum summa æqualis est dimidiæ trium arcuum summæ, hoc est, dimidiæ circumferentiæ seu gradibus 180.

**COR. I.** In triangulo unicus esse potest angulus rectus, vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo angulus acutus est *complementum* alterius ad rectum.

**COR. II.** Datis duobus angulis in triangulo, datur & tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, & gradus 180. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quæ est *complementum* ad duos rectos, & *supplementum* simpliciter appellari solet.

**COR. III.** In triangulo quolibet ABC (Fig. 8.) producto latere CB in I, angulus  
exter-



externus  $ABI$  æqualis est duobus angulis internis oppositis  $ACB$ ,  $CAB$ . Etenim summa anguli externi  $ABI$ , & interni contigui  $ABC$  æqualis est duobus rectis (prop. 1. cap. 1.): sed summa trium angulorum  $ACB$ ,  $CAB$ ,  $ABC$  æqualis etiam est duobus rectis: ergo angulus externus  $ABI$  æqualis est duobus internis oppositis  $ACB$  &  $CAB$ : dempto scilicet communi angulo  $ABC$ .

PROP. II. IN OMNI TRIANGULO MAJUS LATUS OPPONITUR MAJORI ANGULO, MINUS AUTEM MINORI: ET VICEVERSA ANGULUS MAJOR MAJORI LATERI, ET MINOR MINORI OPPONITUR. Triangulum circulo inscribatur, majorem angulum metitur arcus major, & majorem arcum subtendit major chorda, & contra (cor. 5. prop. 2. cap. 2.)

COR. I. In triangulo æquilatero singuli anguli æquales sunt inter se, & viceversa si tres anguli sunt æquales inter se, triangulum est æquilaterum. Inscripto enim, ut ante, triangulo in circulo, tria latera æqualia fient tres æquales circuli chordæ, quæ proinde tres arcus æquales subtendent, ideoque & tres anguli æquales sunt. Evidens autem est, unumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele æquales sunt anguli lateribus æqualibus oppositi; & contra si duo anguli in triangulo æquales sunt, triangulum est isoscele. Patet ut in coroll. præc.

PROP. III. SI IN DUOBUS TRIANGULIS TRIA LATERA ÆQUALIA SINT, TOTA TRIANGULA ERUNT ÆQUALIA. Sit  $AB = ab$ ,  $AC = ac$ ,  $BC = bc$  (Fig. 9.),  
Ex

Ex punctis A & B tanquam centrīs, describantur arcus FCG, DCE se invicem secantes in C. Triangulum abc ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum a, punctum b cadet etiam in B, ob  $AB = ab$ , & ob  $ac = AC$  recta ac terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob  $bc = BC$ , recta bc terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectæ ac, bc se mutuo jungunt in c; utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo ac congruet cum AC; bc cum BC, totumque triangulum abc cum triangulo ABC.

COR. I. Si sit angulus  $A = a$ ,  $B = b$ ,  $C = c$ , & latus  $AB = ab$ ; erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus ab imponatur lateri AB; ob angulum  $a = A$ , &  $b = B$ , cadet ac in AC, & bc in BC; quare latera duo ac, bc, & AC, BC in eodem puncto jungentur, hoc est, c cadet in C, totumque triangulum abc congruet cum triangulo ABC. Eodem modo comparari inter se possunt latera duo ac, AC, quæ respondent angulis æqualibus, & dicuntur *homologa*. Quare æqualia sunt triangula duo, si anguli unius æquales sint angulis alterius; & præterea si triangula latus unum homologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerint æqualia, & angulos his lateribus interceptos æquales, tota triangula erunt æqualia. Sit  $AC = ac$ ,  $AB = ab$ , & angulus  $A = a$ . Imponatur latus AB lateri ab, & latus AC lateri ac; ob angulos A, a æquales, latera illa congruent. Præterea cum sit  $AC = ac$ , &  $AB = ab$ , punctum

c ca.

$c$  cadet in  $C$ , &  $b$  in  $B$ ; ac proinde  $ba$  congruet cum  $BC$ .

PROP. IV. SI DUO TRIANGULA INEQUALIA ÆQUALES HABENT ANGULOS, PONATURQUE ANGULUS UNUS SUPRA ALTERUM ÆQUALEM ANGULUM, ITEMQUE SIBI MUTUO IMPONANTUR LATERA HOMOLOGA, QUÆ ÆQUELEM IN UTRIQUE TRIANGULO ANGULUM COMPREHENDUNT, ERIT TERTIUM LATUS TERTIO LATERI PARALLELUM. Ponatur angulus  $D$  (Fig. 10.) supra angulum æqualem  $B$ , latus  $DF$  supra latus homologum  $BC$ , & latus  $DE$  supra latus  $BA$  itidem homologum; erit latus  $FE$ , vel  $fe$  parallelum lateri  $AC$ . Cum enim angulus  $feB$  æqualis sit angulo  $CAB$ , erit recta  $fe$  rectæ  $AC$  parallela (prop. 2. cap. 1.). Si angulus  $F$  poneretur supra angulum æqualem  $C$ ; simili modo demonstratur, rectam  $DE$  esse rectæ  $AB$  parallelam. Idem dicendum de rectis  $FD$  &  $BC$ .

Viceversa si per punctum  $f$  pro arbitrio sumptum in latere trianguli agatur recta  $fe$  parallela rectæ  $AC$ , æquales sunt anguli  $Bfe$ ,  $BCA$ , &  $Bef$ ,  $BAC$  (loc. cit.). Triangula illa, quæ angulos habent respectively æquales, dicuntur *similia*.

PROP. V. QUODLIBET POLYGONUM RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGULA, QUOT SUNT POLYGONI LATERA. Etenim ex puncto  $C$  intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectæ; evidens autem est, tot esse triangula, quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi possunt polygoni (Fig. 12.). Si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectæ, quot duci possunt, quæ tamen se mutuo non secant. Illæ aut-



lae autem rectae, quae ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocatur; patet, in hoc casu tot esse triangula, quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni æqualis est producto ex 180 gr. in numerum laterum, demptis duobus, hoc est, demptis 360 gr. Etenim anguli polygoni simul sumpti æquales sunt angulis omnibus triangulorum, in quæ reductum est polygonum, demptis angulis, quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360 gr. (prop. 1. cap. 5.). Sed tot sunt triangula, quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni æqualis est producto ex 180 gr. in numerum laterum binario multiplicatum. Ita si polygonum habuerit septem latera, summa

---

angulorum est  $= 180 \text{ gr.} \times 7 - 2 = 900 \text{ gr.}$

Idem quoque evidens est, si polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis angulorum summa angulis polygoni æqualis; ac proinde summa illa æqualis est producto ex 180 gr. in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni (Fig. 11.) per rectas AC, BC, DC, EC, &c. rectae illae se mutuo secabunt in C, & erunt inter se æquales. Etenim rectae AC & BC sibi occurrentes in puncto aliquo C efficiunt triangulum ACB; itemque rectae BC & DC aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt æqualia; nam cum anguli polygoni regularis æquales sint & bifariam æqua-

æqualiter dividantur, æquales sunt anguli CAB, CBA inter se, & angulis CBD, CDB; præterea æqualia sunt latera AB, BD; ergo isoscelia sunt, & æqualia triangula ACB, BCD (cor. 2. prop. 3.). Quare  $AC = DC = BC$ ; & propter latus commune BC punctum intersectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum intersectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC &c.

COR. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum dividunt in tot triangula isoscelia & æqualia, quot sunt polygoni latera; & quodlibet polygoni latus fit chorda arcus, qui æqualis est quoto ex gradibus 360 per numerum laterum divisus. Ita latus decagoni est chorda arcus grad. 36.

COR. IV. Latus hexagoni regularis circulo inscripti æquale est circuli radio. Nam si ex centro C in sex triangula dividatur hexagonum, æquilatera sunt triangula illa ob radios CA & CB æquales, & angulum ACB  $=$  gr. 60. Quare singuli anguli CAB, ABC sunt etiam 60 gr., ac proinde  $CA = AB$ .

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus, qui singula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inscripti totidem sint chordæ æquales, chordæ illæ a centro æqualiter distant (cor. 1. prop. 2. cap. 2.). Quare si ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, hæ chordas æqualiter dividunt, atque æquales erunt. Ergo per singulas perpendicularem extremitates describi poterit circulus, qui singula polygo-

ni



ni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop. 3. cap. 2.)

**COR. VI.** Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quærat<sup>ur</sup> polyg<sup>oni</sup> centrum: quo invento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur invento polyg<sup>oni</sup> centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceversa polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360 gr. per duplum numerum laterum polyg<sup>oni</sup>, sumptoque arcu  $iK$ , qui sit quoto æqualis, per extremitates  $K$  &  $i$  ducatur radius  $CK$ ; agaturque recta indeterminata  $CB$  ad punctum  $K$ , erigatur perpendicularis  $DKB$  occurrens  $CB$  in puncto  $B$ , transferatur  $KB$  in  $KD$ ; erit  $BD$  latus polyg<sup>oni</sup> quæsi<sup>ti</sup>. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio  $CB$  describatur circulus, & per totam circumferentiam transferatur chorda  $DB$ , atque inscribatur polygonum  $DBAGFE$ , quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes æquales, & æqualiter divisæ in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quæsi<sup>to</sup>.

Simili constructione circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360 gr. per numerum laterum polyg<sup>oni</sup> quæsi<sup>ti</sup>, sumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis; chorda hujus arcus erit latus polyg<sup>oni</sup>: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæsi<sup>ti</sup>um.

Hic autem diligenter observandum est, per Geometriam elementarem circulo inscribi posse



posse dumtaxat triangulum æquilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, & polygona regularia, in quibus numerus laterum, se habet in progressionem geometricam duplicem. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 &c. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64 &c. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 &c. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 &c. Alia polygona, ut Eptagonum, Enneagonum, Endecagonum &c. describi non possunt geometricè, nisi per constructionem æquationum, quæ ad sublimiorem gradum assurgunt.

SCHOL. Cum polygonum regulare circulo inscribi, & circumscribi possit; quo major est in polygono inscripto, vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum, & circulum sit data quavis differentia minor: jam circulus considerari potest tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis, & infinite parvis compositum. Hæc circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitarum A & B differentia sit qualibet assignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Et enim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, jam quantitarum illarum differentia non est qualibet assignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis limes.

limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhaustiorum*, seu *primarum*, & *ultimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusius explicabimus in prima parte *Physices*, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo Capite, quantum haec nobis satis est, breviter exponemus.

## C A P U T IV.

*De linearum ratione, seu de proportionalibus.*

**P**ROP. I. IN TRIANGULIS SIMILIBUS  $\triangle acb$ ,  $\triangle ACB$  (Fig. 13. & 14.) LATERA HOMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA. Ponatur  $ab$  pars dimidia rectae  $AB$ ; nempe sit  $Ab$  aequalis rectae  $ab$ , agaturque  $cg$  parallela rectae  $AB$ ; erit  $cg = bA$ . Quod evidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea  $bg$ , erit ob angulos inter parallelas aequales, & ob latus commune  $bg$ , triangulum  $bcg$  aequale triangulo  $bgB$ , & latus  $cg = bB$  (cor. 1. prop. 3. cap. præc.). Ergo  $cg = bB = Ab$ . Præterea triangulum  $Ccg$  aequale est triangulo  $cAb$  (loco cit.) Ergo  $Cc = Ac$ , &  $Cg = cb = gB$ . Quare  $Ac$ , vel  $Cc$  erit pars dimidia rectae  $AC$ ; sicut  $cb$  est pars dimidia rectae  $CB$ .

Si  $ab$  sit tertia, vel quarta, aut quælibet alia pars rectae  $AB$ , simili modo evidens est, rectas  $ac$  &  $cb$  esse tertiam, quartam &c. partem rectarum  $AC$ ,  $CB$ . Etenim ex divisionum punctis  $b$ ,  $f$  in recta  $AB$  ducantur  $bc$ ,  $fh$ , &c. rectae  $BC$  parallelæ, & eadem ratiocinatione patet, triangula  $Acb$ ,  $chg$ ,  $hCi$  &c. aequalia esse triangulo  $acb$ , seu triangulo  $Acb$ .

Si

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, & bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg æqualibus triangulo acb, inter parallelas hf, & CB construi poterit triangulum hCi, cujus latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, cum sit fB pars dimidia rectæ Ab, (per hyp.) & recta ih æqualis rectæ fB ob parallelas hf & CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB & hCi rectas AB & ih esse inter se *incommensurabiles*: divisa intelligatur recta ih in partes 100, jam recta AB certum continebit partium numerum cum aliquo residuo, cum lineæ illæ sint incommensurabiles. Rursus recta ih divisa fingatur in partes 1000, certum earundem partium numerum continebit recta AB, sed cum residuo, quod priori residuo minus est: atque ita deinceps minus perpetuo fiet residuum, quo plures erunt partes. Quare ponatur partium numerus infinitus, jam residuum fit nullum. Ergo generatim triangula quælibet similia latera homologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in CA inter easdem parallelas, ut numerus quilibet alius partium CB ad numerum partium in CA inter easdem parallelas. Etenim  $Ch : hc = Ci : im$ , &  $Ch : Ci = hc : im$ . Item  $hc : cA = im : mB$ , &  $hc : im = cA : mB$ . Ergo  $Ch : Ci = hc : im = cA : mB$ . Quare CA est ad CB, ut numerus quilibet partium in CA ad eundem numerum partium in CB.

PROB.



**PROB. II.** DUO TRIANGULA, IN QUIBUS LATERA HOMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA, ÆQUIANGULA SUNT. Si (Fig. 10.) ponatur  $AC:BC = FE:FD$ , &  $AC:AB = FE:ED$ , æquiangula erunt triangula  $ABC$  &  $EDF$ . Nam si super  $EF$  construatur triangulum  $FGE$  triangulo  $ABC$  æquiangulum, facto scilicet angulo  $GEF = BAC$ , & angulo  $GFE = ACB$ , & angulo  $FGE = CBA$ ; erit  $AC:BC = FE:FG$ ; sed (per Hyp.)  $AC:BC = FE:FD$ ; ergo  $FE:FG = FE:FD$ , ac proinde  $FD = FG$ . Similiter ob triangula  $ABC$ ,  $FGE$  similia, erit  $AC:AB = FE:FG$ ; sed (ex Hyp.)  $AC:AB = FE:ED$ ; ergo  $FE:EG = FE:ED$ ; ac proinde  $EG = ED$ . Quare triangula duo  $FED$  &  $FEG$  æquiangula sunt, & æqualia, ob latus commune  $FE$ , & latera  $FD$ ,  $FG$ , &  $EG$ ,  $ED$  æqualia (prop. 3. cap. præc.) Sed (per constr.) triangulum  $FGE$  triangulo  $ABC$  est æquiangulum; ergo triangulum  $FED$  ipsi quoque est æquiangulum.

**COR. I.** Si in triangulis  $ABC$  &  $EDF$  sit angulus  $D = B$ , & præterea  $DE:DF = BA:BC$ ; erit triangulum  $EDF$  triangulo  $ABC$  æquiangulum. Nam super  $AB$  capiatur  $Be = DE$ , ducaturque  $ef$  parallela rectæ  $AC$ ; triangula  $ABC$  &  $eBf$  sunt æquiangula; cum ob parallelam  $ef$  angulus  $feB = A$ ,  $efB = C$ , & ob angulum  $B$  communem. Ergo  $Be: Bf = BA:BC$ . Sed (ex Hyp.)  $DE:DF = BA:BC$ , ergo  $Be: Bf = DE:DF$ ; at  $Be = DE$ ; ergo  $Bf = DF$ ; ac proinde duo triangula  $Bef$ ,  $DEF$  sunt æqualia, & similia; sed  $Bef$  est triangulo  $BAC$  æquiangulum, ergo triangu-

gulum EDF est æquiangulum triangulo ABC; ac proinde generatim triangu-  
la, quorum la-  
tera duo homologa circa æqualem angulum  
sunt proportionalia, sunt æquiangula.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angu-  
lum BAC bisariam, & æqualiter dividat  
in triangulo BAC; eadem recta latus oppo-  
situm BC dividit quoque in duas partes BD  
& DC lateribus AB & AC proportionales.  
Etenim producta recta CA in E, per pun-  
ctum B agatur BE rectæ AD parallela: tri-  
angula BCE, DAC erunt similia (prop. 1.)  
ac proinde  $BD : DC = AE : AC$ ; sed ob  
parallelas angulus  $BEA = DAC = DAB$   
 $= ABE$ ; ergo triangulum BAE est iso-  
sceles (cor. 2. prop. 2. cap. præc.) : quare  
 $AE = AB$ , ideoque  $BD : DC = AB :$   
 $AC$ .

COR. III. Si ex angulo recto A trian-  
guli rectanguli BAC demittatur perpendicu-  
laris AD in basim BC, quæ angulo recto  
imminet, & *hypotenusa* dicitur; hæc divi-  
det triangulum in duo alia triangu-  
la BAD, DAC inter se, & triangulo BAC similia.  
Et quidem triangu-  
la BAD, DAC præter  
angulum rectum habent quoque cum trian-  
gulo BAC angulum communem; ac proin-  
de similia sunt inter se, & toti triangulo.  
Hinc  $BD : DA = DA : DC$ , &  $BD :$   
 $BA = BA : BC$ , ac tandem  $DC : CA$   
 $= CA : CB$ .

COR. IV. Dum sit  $BD : BA = BA :$   
 $BC$ , erit  $BA^2 = BD \times BC$  (ob produ-  
ctum mediorum æquale producto extremo-  
rum). Similiter cum sit  $DC : AC = AC :$   
 $CB$ , erit  $AC^2 = DC \times CB$ . Ergo  $BA^2$

†

$$\dagger AC^2 = BD \times BC + DC \times BC =$$

$$BD + DC \times BC = BC \times BC = BC^2.$$

Quare quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo æquale est quadratis laterum.

**COR. V.** Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis sit hypotenusa trianguli rectanguli, cujus latera sunt æqualia, quadratum diagonalis æquale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis & contra.

**COR. VI.** Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiæ circuli puncto quolibet in diametrum demissa est media proportionalis inter duo segmenta CO & OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde CO : EO = EO : OL, & EO<sup>2</sup> = CO × OL. Recta perpendicularis EO dici solet *ordinata*; *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem, & circumferentiam comprehensa.

**PROP. III.** SI DUCANTUR IN CIRCULO CHORDÆ DUÆ BA & DC (Fig. 17.) SE MUTUO SECANTES IN E, CHORDARUM SEGMENTA ERUNT RECIPROCE PROPORTIONALIA. Si enim ducantur DA & CB, triangula BEA & DEC sunt similia ob angulos in E æquales, atque ob angulos C, A, & B, D iisdem arcubus subtensos. Quare AE : DE = CE : BE.

**COR.**



COR. I. Si duæ lineæ EB, EC ( Fig. 18. ) ex eodem puncto extra circulum ductæ ad superficiem concavam terminentur, partes externæ EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt ob angulum E communem, & angulos B, C eodem arcu AD subtenios. Ergo  $EA : ED = EC : EB$ .

COR. II. Si recta EB sit secans, altera autem Ed tangens; erit  $EB : Ed = Ed : EA$ . Nam ductis dB, dA, similia erunt triangula EdB, EdA ob angulum E communem, & angulos EBd, AdE æquales, quorum communis mensura est dimidius arcus Ad (cor. 3. prop. 4. cap. 2). Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde  $EB : Ed = Ed : EA$ , hoc est, tangens est media proportionalis inter rectam totam EB, & partem externam EA.

COR. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione, ut major pars sit media proportionalis inter totam rectam, & ejusdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19.) super datæ rectæ AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiæ AB æqualis, & centro E radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B & E agatur recta BF, & centro B, radio BD describatur arcus DC; hic occurret rectæ AB in puncto quæsito. Etenim ob tangentem BA erit  $BF : BA = BA : BD$ ; ac proinde  $BF - BA : BA = BA - BD : BD$ . Sed  $BF - BA = BD = BC$ ; cum sit  $FD = BA$ , utpote duplæ ipsius EA, quæ est dimidia rectæ AB. Simili modo  $BA - BD = AC$ ; ergo substitutione facta,  $BC :$

Jacq. T. III.

F

BA

$BA = AC : BC$ , vel  $BA : BC = BC : AC$ . In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent Geometræ: *rectam dividere in media, & extrema ratione*.

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt. *Tribus datis rectis quartam proportionalem invenire. Inter duas rectas invenire mediam proportionalem*. Sed hæc manifesta sunt ex præcedentibus.

PROP. IV. SI DUE FIGURÆ SIMILES IN TRIANGULA UTCUNQUE DIVIDANTUR PER DIAGONALES EX ANGULIS HOMOLOGIS DUCTAS, TRIANGULA HOMOLOGA ERUNT SIMILIA. Etenim sint duo polygoni  $ABCDE$  &  $FGHIK$  (Fig. 20.) in quibus angulus  $A = F$ ,  $B = G$ ,  $C = H$ ,  $D = I$ ,  $E = K$ , sitque præterea  $AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF$ ; ductis diagonalibus  $AC$ ,  $AD$ ,  $FH$ ,  $FI$ , similia erunt triangula  $ABC$ ,  $FGH$ , &  $ACD$ ,  $FHI$ , atque  $ADE$ ,  $FIK$ . Nam cum anguli  $B$  &  $G$  æquales sint, & lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula  $ABC$ ,  $FGH$ , &  $ADE : FIK$ . Itaque angulus  $BAC = GFH$ ,  $DAE = IFK$ . Ergo  $BAE = BAC = DAE = CAD = GFH = GFH = IFK = HFI$ . Igitur angulus  $CAD =$  angulo  $HFI$ . Simili modo ostenditur, angulos  $ACD$ ,  $FHI$ , &  $ADC$ ,  $FIH$  æquales esse. Quare triangula  $ACD$  &  $FHI$  sunt æquiangulara.

Viceversa duæ figuræ quælibet similes sunt, si in triangula æquiangulara resolvi possint. Nam ob angulos æquales in triangulis æquiangularis æquales sunt anguli homologi in unaquaque figura. Quare cum latera figurarum sint



sint triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ similes sunt.

COR. IV. Si dividatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione; ita ut sit  $BC : GH = LC : MH$ . Deinde si ducantur rectæ duæ ad arbitrium LN & MO, quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant, vel quæ dividant latera homologa ED & KI in eadem ratione; ita ut sit  $ED : KI = DN : IO$ ; erit  $LN : MO = CD : HI = BC : GH$  &c. Nam ductis NC & OH, triângula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I æquales lateribus proportionalibus NC, DC, & OI, IH comprehensos. Quare  $CD : HI = CN : HO$ , & angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL, IHM, remanebunt æquales anguli NCL, OHM; ac proinde triângula NCL, OHM similia sunt: ideoque  $LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD : HI$  &c. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineæ, quæ dividant latera homologa, vel angulos homologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter se, atque etiam eorundem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

SCHOL. Linearum rationem jam consideravimus in quantitativis finitis; superest, ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitativum, quas *infinite magnas*, & *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est, nullam quantitatem in se spectatam, & sine nostro cogitandi modo aut infinite parvam esse, aut infinite magnam, sed magnitudo quælibet in



se determinata est. Et quidem data quavis magnitudine, utcunque parva, vel utcunque magna, alia semper minor in primo casu, & alia semper major in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam, vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infinitesimam*, vel *infinite parvam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*; rationem, quam duæ quantitates finitæ habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem, diversos esse infinitorum, & infinitesimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita, vel infinitesima; semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscunque limites augeri potest & minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoscunque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, quantitatem hanc dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, & ita deinceps. Viceversa si quædam quantitas sit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*; & ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo, cujus diameter est ad chordam, ut est chorda ipsa ad abscissam; ac proinde si fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi.

Ex his patet, calculo subjici posse quantitates

tes infinitas & infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet  $\infty$ . Quare numerorum series infinita hoc modo repræsentari potest 0. 1. 2. 3. 4. 5. ....  $\infty$ . Pari modo quantitas quælibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes, donec perveniat ad quantitatem infinitesimam. Talis est series,

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{\infty}$$

Evidens autem est, quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione, vel subtractione majorem, vel minorem non fieri; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem: similiratione, quantitas infinite parva quantitatem finitam augere, vel minuire non potest. Itaque  $\infty \pm 1 = \infty$ , &  $1 \pm 1 = 1$ .

Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit  $\infty^2 \pm a \infty = \infty^2$ , &  $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ . Verum si quantitates

eiusdem generis considerentur, sive infinitæ, sive infinitesimæ, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere; probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat, & secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas, vel infinitesimas. Quare  $\infty \pm \infty = 2\infty$ ;  $1 \times 3^\infty = 3^\infty = 3$ ;  $\frac{2}{\infty} = \frac{a}{\infty} = 0$ ;  $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ ;

$$\infty \times \infty = \infty^2;$$

$$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty; \frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}; \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2};$$

F 3

1/2

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty.$$

Ex his multa colligere est.

Quantitates infinitæ vel infinitesimæ ejusdem ordinis adduntur, vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam ejusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cujuscunque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cujuscunque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cujus exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione si quantitas infinita ordinis cujuscunque per quantitatem infinitam ordinis cujuslibet dividatur, habetur quantitas, cujus gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cujuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cujuscunque multiplicetur, aut dividatur; in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprime-tur gradum, qui per exponentium summam exhibetur; in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repræ-sentatur, ita ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Hæc pauca dicta sint *de primarum, & ultimarum rationum methodo*, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.

A P.



A P P E N D I X.

*De proportionum usu in triangulorum  
resolutione, sive de  
Trigonometria.*

I. **E**X linearum proportionem tota pendet  
*Trigonometria*, quæ est ars resollen-  
di triangula. In triangulo autem sex partes  
considerari possunt, nempe tres anguli, &  
tria latera. Huc autem refertur Trigonometria  
praxis, ut datis tribus ex sex parti-  
bus trianguli, partes reliquæ inveniantur;  
ac proinde tres partes datæ constituere de-  
bent tres primos proportionis terminos, &  
terminus quartus erit pars quæsitæ. Verum  
quia latera trianguli expressam rationem non  
habent cum angulis, quorum mensura sunt  
arcus circuli; angulis, vel arcubus circuli  
substituuntur lineæ rectæ, quæ arcus illos ex-  
hibeant, & trianguli lateribus proportionales  
sint. Harum linearum definitiones affere-  
mus, & proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet  $ACB$  (Fig. 21.),  
ex cuius vertice  $C$ , tanquam centro, & ra-  
dio ad arbitrium sumpto describatur circu-  
lus  $AHaG$ . Producat  $AC$  in  $a$ , eriga-  
turque in  $C$  perpendicularis  $CH$ ; evidens  
est, angulum  $BCH$ , vel arcum  $HB$  esse  
*complementum* anguli  $ACB$ , vel arcus  $AB$ ;  
angulus  $BCa$ , vel arcus  $Ba$  est *supplemen-*  
*tum* anguli  $ACB$ , vel arcus  $AB$ , & vice-  
versa  $BA$  est *complementum* ipsius  $HB$ , &  
*supplementum* ipsius  $aB$ . Recta  $BD$  ex ra-  
dii extremitate  $B$  ad radium  $CA$  perpendi-  
culariter ducta dicitur *sinus* arcus  $AB$ , vel

anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E vocatur *tangens* arcus AB; recta autem CE ejusdem arcus *secans* appellatur. Pars AD radii inter arcum, & sinum comprehensa dicitur *sinus versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*; CK *secans complementi*, & HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi &c. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur I. Sinus, cosinus, tangens, cotangens &c. anguli obtusi BCa sunt etiam sinus, cosinus &c. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a demitti non potest perpendicularis, quæ non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares BD, ad; similiter tangens alia esse non potest, quam æe; sed ob triangula aCd, BCD, & Cæe, CAE æqualia, habetur  $ad = BD$ , &  $æe = AE$ . Cum autem sit arcus BH complementum arcus AB, evidens est, BI esse cosinum arcus AB & HK illius cotangentem .... 2. Sinus BD arcus AB est dimidium chordæ BG, arcum duplum BAG subtendentis. (Prop. 1. cap. 2.) .... 3°. Sinus crescunt crescentibus angulis a 0° usque ad 90 gr., & eodem modo decrescunt a 90 gr. usque ad 180 gr. .... 4°. Sinus arcus 30 gr. dimidio

mi dio radio æqualis est; est enim radius æqua-  
lis chordæ arcus 60 gr. (cor. 4. prop. 5. cap.  
3. ) & ejusdem arcus sinus est dimidia chor-  
da arcus dupli. Itaque in triangulo rectan-  
gulo latus oppositum angulo 30 gr. est di-  
midia hypotenusæ hujus trianguli. Nam si  
 $\angle ACB = 30$  gr., erit  $BG = BC$ , &  $BD$   
 $= \frac{1}{2} BC$  .... 50. Tangentes crescunt,  
crescentibus angulis a  $0^\circ$  usque ad 90 gr.,  
ita ut tangens arcus grad. 90 sit infinita;  
nam radius CH in angulo recto HCA non  
potest concurrere cum tangente .... 60. Tan-  
gens arcus 45 gr. æqualis est radio; nam  
si angulus ACB sit 45 gr. triangulum re-  
ctangulum CAE erit isosceles, &  $AE =$   
 $AC$  .... 7. Sinus versus AD arcus, qui  
minor est 90 gr. æqualis est differentiæ in-  
ter radium CA, & cosinum CD  $= BI$ .  
Præterea cosinus versus HI est differentia  
inter radium CH, & sinum CI  $= CD$ .  
at sinus versus supplementi nempe Da æqua-  
lis est summæ radii, & cosinus .... 8. Ob  
triangula rectangula similia CDB, CAE,  
CIB, CHK, erit  $CA : CD$ , vel  $BI =$   
 $AE : BD$ , nempe radius est ad cosinum,  
ut tangens ad sinum. Deinde hæc alia ha-  
betur analogia  $CH : CI$ , vel  $BD = HK :$   
 $IB$ , hoc est, radius ad sinum, ut cotangens  
ad cosinum. Tandem  $AE : CA = CH$ ,  
vel  $CA : HK$ ; hoc est tangens ad radium,  
ut radius ad cotangentem .... 9. Ex præ-  
cedentibus analogiis derivantur formulæ, qua-  
rum ope sinus substituuntur tangentibus, &  
vice versa. Sit  $R = 1$ , erit Sin.  $=$

$$\begin{array}{l} \text{Cos.} \\ \text{Cos.} \times \text{Tang.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}; \text{Cos.} = \text{Sin.} \\ \text{F 5} \quad \times \text{Cot.} \end{array}$$



$$\begin{aligned} \times \text{Cot.} &= \frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}} ; \text{Tang.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} \\ &= \frac{1}{\text{Cot.}} ; \text{Cot.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Tang.}} ; \text{Cot.} \end{aligned}$$

$$A \times \text{Tang. } A = 1 = \text{Cot. } B \times \text{Tang. } B$$

.... 10. In omni triangulo sinus angulorum sunt, ut latera angulis opposita. Et enim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt chordæ arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi. Sed semisses sunt inter se, ut tota; ergo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum. Hinc cum sinus anguli recti sit radius, & latus oppositum sit hypotenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypotenusam, ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum .... 11. In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius; ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum, ut latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum, ut tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli unius acuti est ad radium, ut latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum. 12.

In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) hæc semper habetur analogia: majus latus AC est ad summam duorum aliorum laterum AB + BC, ut eorundem laterum differentia AB - BC ad differentiam segmentorum AE, & CE, quæ sunt ducta ex angulo majori B in majus latus AC perpendiculari BE. Nam si ex anguli vertice B tan-

B tanquam centro, & radio, qui sit minori lateri æqualis BC; describatur circulus GCD, producto latere AB in G; erit  $AG = AB + BC$ , &  $AP = AB - BC$ ; atque ob  $CE = ED$ , erit  $EA - CE = AD$ , ac tandem  $AC : AG = AP : AD$ .

III. Si in arcu quolibet AB (Fig. 21.) detur sinus, aut cosinus, sinusversus, aut cosinusversus, ex uno dumtaxat dato tria reliqua inveniuntur. Nam  $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$  &  $\text{Cof.} = \sqrt{R^2 - \text{Sin.}^2}$  Præterea  $DA = CA - CD$ , &  $\text{Sin. versus} = R - \text{Cof.}$  Tandem  $HI = CH - CI$ , &  $\text{Cof. versus} = R - \text{Sin.}$  Initis calculis in arcu quolibet pro dimidio vel duplo arcu calculus facile institui potest. Nam (Fig. 23.) ducta chorda BA, & ex puncto C demissa perpendiculari CE, datisque BD, DA; erit  $BA = \sqrt{BD^2 + DA^2}$  Quare FA, vel  $\text{Sin. } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{Sin.}^2 + \text{Sin. vers.}^2}$ . Et  $CF = \sqrt{CA^2 - AF^2}$ . Ergo  $\text{Cof. } \frac{1}{2} = \sqrt{RR - \text{Sin.}^2 \frac{1}{2}}$ . Præterea si habetur AE, tanquam arcus datus, similia erunt triangula FCA, DBA; quare  $CA : CF = AB : BD$ , vel  $R : \text{Cof. arc} = 2. \text{Sin. arc} : \text{Sin. arcus dupli}$ . Quod facile colligitur ex præcedentibus, sed tamen demonstratur. Datis enim sinibus BD, KL duorum arcuum AB, KB, habetur sinus KM illorum summæ (Fig. 24.), vel illorum differentiæ (Fig. 25.). Etenim datis CD, CL, erit  $CB : CL = BD : LP$ , vel  $OM$ ; ergo  $OM = \text{Sin. AB} \times \text{Cof. KB}$

R

F 6

gula

Præterea ob trian-

gula rectangula similia KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig. 24.) & KOL, KMQ, CQL, CBD (Fig. 25.) in triangulis KOL, CBD erit  $CB:CD = KL:KO$ . Quare  $KO = \text{Sin. KB.} \times \text{Cos. AB}$

\_\_\_\_\_ . Hinc facto  $R = 1$ ,

R

erit KM, vel  $\text{Sin. BK} \div \text{AB} = \text{Sin. BK} \times \text{Cos. AB} \div \text{Sin. AB} \times \text{Cos. KB}$ . Sit arcus AB 30 gr. (Fig. 26.) &  $BF = BK$ ; ob triangu-  
la rectangula similia SIF, SQG, erit angulus  $IFS = GQS = BCA = 30$   
gr. Ergo angulus  $KFC = 30$  gr. Quare  $CK = \frac{1}{2} FK = IK = FI$ . Sed  $FK = CK^2 = FG^2$  vel  $4IK^2 = IK^2 = FG^2$ . Ergo  $3IK^2$  vel  $IK^2 \times 3 = FG^2$ . Quare  $IK \times \sqrt{3} = FG$ , &  $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$ ; hoc est, sinus KM arcus KA, mino-  
ris scilicet, quam 30 gr. & sinus KI, dif-  
ferentiæ scilicet inter hunc arcum, & 30 gr.  
per  $\sqrt{3}$  multiplicatus simul sunt æquales  
sinui FN arcus FA, qui tanto major est ar-  
cu 30 gr. quanto arcus KA minor est. Ob  
arcum  $FI = GK$ , erit  $FT + GH = KO$ ,  
nempe sinus FT arcus HF minoris,  
quam 60 gr. & sinus FI, differentiæ scili-  
cet inter hunc arcum, & 60 gr. simul æ-  
quantur sinui KO arcus HK, qui tanto ma-  
ior est arcu 60 gr. quanto FK minor est.  
Ita  $\text{Sin. } 55 \text{ gr.} + \text{Sin. } 5. \text{ gr.} = \text{Sin. } 60 \text{ gr.}$   
Itaque demonstravimus principia, quorum  
ope formari possunt sinuum, & tangentium  
tabulæ. Illæ autem tabulæ commoditatis  
ergo per logarithmos construuntur, cujus qui-  
dem constructionis ratio ex logarithmorum  
doctrina jam explicata intelligitur.

III. In



III. In omni triangulo ABC (fig. 22.) summa duorum laterum quorumcumque  $AB + BC$  est ad illorum differentiam  $AB - BC$ , ut tangens semisummæ duorum angulorum A, & C, qui his lateribus opponuntur ad tangentem semidifferentiæ eorundem angulorum. Etenim sit P semisumma angulorum A, & C; & Q illorum semidifferentia: erit angulus major  $C = P + Q$ , & minor  $A = P - Q$ . Jam (ex dem.)  $AB : BC = S. C : S. A = S. P + Q : S. P - Q = S. P \times \text{cos. } Q + \text{cos. } P \times S. Q : S. P \times \text{cos. } Q - \text{cos. } P \times S. Q$ . Ergo  $AB \times S. P \times \text{cos. } Q - AB \times \text{cos. } P \times S. Q = BC \times S. P \times \text{cos. } Q + BC \times \text{cos. } P \times S. Q$ ; vel  $AB - BC \times S. P \times \text{cos. } Q = AB + BC \times \text{cos. } P \times S. Q$ . Quare dividendo per  $\text{cos. } P \times \text{cos. } Q$ , factaque reductione, habebitur  $AB - BC \times S. P = AB + BC \times S. Q$ . Sed  $\frac{\text{Sin.}}{\text{Cof.}}$   $\frac{\text{cos. } Q}{\text{cos. } P} = \text{tang. } Q$ . Ergo  $\frac{AB + BC}{AB - BC} \times \text{tang. } Q = \text{tang. } P$ . Quare  $AB + BC : AB - BC = \text{tang. } P : \text{tang. } Q = \frac{A + C}{A - C}$ .

IV. His principiis universa innititur Trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum, & angulus, vel duo anguli, & latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quæ jam

jam diximus, reliqua inveniuntur per hætenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quæ sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, cum infinita possint contrui triangula similia inæqualia. Neque etiam sine observatione prætermittendus est casus, in quo dantur duo latera, & angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, & duas solutiones potest admittere; cum (ex dem.) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus, vel obtusus.

In omnibus Trigonometriæ libris reperiuntur sinuum, & tangentium tabulæ. Quamvis autem ex hætenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu graduum 30 per antea demonstrata, inveniri possunt sinus grad. 15, deinde  $7\frac{1}{2}$ , postea  $2\frac{1}{2}$ , & ita sinuum semisses, progrediendo usque ad duodecimam operationem, nempe usque ad  $52'' 43''' 3'''' 4$ ; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus  $1'$  est ad suum sinum. Dato autem sinu arcus  $1'$ , invenietur sinus arcuum  $2\ 3\ 4$  &c. & ita deinceps usque ad 30 gr. Tandem a 30 gr. usque ad 60 gr., & a 60 gr. usque ad 90 gr. progredi licebit: quo facto tangentes ad calculum revocare jam facile erit.

SE-

## S E C T I O I I.

*De Geometria superficierum.*

## C A P U T I.

*De præcipuis planarum superficierum.  
proprietatibus.*

**P**PROP. I. TRIA PUNCTA, QUÆ IN  
EADEM RECTA NON JACENT, PLANI  
POSITIONEM DETERMINANT. Id patet ex  
definitione ipsius plani. Et quidem per tria  
puncta duci potest planum, quod evidens  
est; illud vero planum unicum esse, mani-  
festum est; ponamus enim, planum aliud,  
quod cum primo in tribus punctis congruat,  
in aliis autem ab ipso deflectat: in eadem  
linea recta, quæ primo in plano jaceret,  
alteri plano aptari perpetuo non posset, ne-  
que secunda superficies illa foret omnium  
intra eosdem terminos ductarum brevif-  
sima; quod est contra definitionem plani.  
Ergo per tria puncta unicum planum duci  
potest; ac proinde constans est, ac determi-  
nata positio plani per data tria puncta tran-  
seuntis.

COR. I. Duæ rectæ se invicem secantes  
sunt in eodem plano. Nam punctum inter-  
sectionis, & punctum quodlibet aliud in bi-  
nis lineis pro arbitrio sumptum tria sunt  
puncta in directum non posita, quæ pro-  
inde determinant positionem plani, in quo  
jacent duo utriusque lineæ puncta, ac pro-  
inde & totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eo-  
dem



dem plano tertia recta secantur, recta secans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejusdem lineæ puncta, duæ scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur punctum, quod rectæ positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea, cujus singula puncta jacent in utroque plano. Patet autem, tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi jaceant in directum. Cum enim tria puncta, quæ non sunt in eadem recta, positionem plani determinent; si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possent, jam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta,

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano jacentes & per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem non insistere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis; jam linea illa infra planum deprimitur, vel attollitur supra idem planum; ac proinde non jaceret in eodem plano ( quod est contra hypoth. )

COR V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ, sunt inter se parallelæ, & contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano jungantur; duæ illæ lineæ ad planum perpen-

perpendicularares, vel æqualiter inclinatæ erunt quoque perpendicularares, vel æqualiter inclinatæ ad eandem lineam jungentem; est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ, & vice versa.

**PROP. II. DUO PLANA SIBI MUTUO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES, QUAS DE RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMUS.** Ponamus, planum aliquod A immobile, in quo jaceat planum aliud B lineis rectis terminatum, qualia sunt polygonæ rectilineæ: hæc duo plana, utpote omni crassitie destituta, in unum coalescunt planum. At si planum B revolvi intelligatur circa latus aliquod plani A, fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repræsentabit. Et quidem 1°. ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam, circa quam planum B revolvitur, quæ proinde est utriusque plani intersección ..... 2°. planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tandiu convertatur, donec ad oppositam plani A partem perveniat ..... 3°. Planum revolvens plano immoto fiet perpendicularare, ubi ad eum pervenerit situm, in quo non magis pendeat ex una parte, quam ex alia ..... 4°. Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli, cujus centrum perpetuo manebit in communi planorum intersección. Quia vero centrum in ipso circuli plano jacet, necessum est, hujus arcus centrum esse in lineæ rectæ, cujus revolutione generatur ipsum arcus planum ... 5°. Si concipiatur lineæ quædam sublimis, cui perpendicularariter affixa sit rectæ alia; hæc rectæ planum describet, interea dum  
linea



linea sublimis circa seipsam convertitur in eodem perpetuo manens loco. Si autem duæ lineæ sibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo descripta plana non foret; sed ex una parte convexa, & ex altera concava, ut patet. Quare ex ipsa plani formatione evidens est, revolutione rectæ planum describi non posse, nisi recta revolvens sit ad lineam, in qua revolvitur, perpendicularis ... 6 . Centrum arcus, in quo sumuntur gradus inclinationis plani unius ad aliud, positum est in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum intersectionem ducta. Quare si describatur semicirculus, cujus centrum sit in linea duobus planis communi, & cujus planum sit ad planum immotum perpendiculare; per huius semicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad se invicem inclinata eadem habent proprietates, quæ in mutua linearum inclinatione demonstrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis æquales. (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II. In planorum intersectione æquales sunt anguli ad verticem oppositi. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eandem habeant communem intersectionem, summæ angulorum omnium est 360. gr. (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IV. Ex puncto dato extra planum, vel intra planum unica perpendicularis ad planum duci potest. (Cor. 4. prop. 1. cap. 1.)

COR. V. Distantia puncti alicujus a plano

no



no dato est perpendicularis ex puncto dato ad plenum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum secans duo, vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præterea angulus internus alterius interni supplementum est atque etiam angulus externus est supplementum alterius (Prop. 2. cap. 1.)

COR. VII. Si duo, aut plura plana parallela alio plano secantur, communes intersectiones erunt parallelæ. Si enim non sint parallelæ, sibi occurrere possunt, ac proinde & plana ipsa, in quibus hæ lineæ jacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hyp.

## C A P U T I I.

### *De superficierum mensura.*

PROP. I. SUPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGULI ÆQUALIS EST PRODUCTO EX BASI IN ALTITUDINEM. Sit parallelogrammum rectangulum ABCB (Fig. 26.), cujus altitudo AD certum contineat pedum numerum: E. G. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quæ singulæ continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt æquales superficies, ut DM; ac proinde superficies tota parallelogrammi erit  $7 \times 8$ , nempe 56 pedum quadratorum.

Evi-

Evidens est, in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo, & basis parallelogrammi ponantur *incommensurabiles*, ut patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem dividatur, habebuntur triacula duo rectangula æqualia; quorum proinde superficies, utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet etiam non rectangulo. Sit enim triangulo CAB (Fig. 27.) non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, & triangulum DAB dimidium rectanguli DABE. Quare, ut ante, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, & triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED, seu  $CEB - DEB = \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD = \frac{CB - DB}{2} \times AD = \frac{1}{2} CD \times AD$ ; ac

proinde trianguli cujuslibet superficies æqualis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triacula æqualia, quæ ipsam habeant parallelogrammi basim, eandemque altitudinem; patet generatim, super-



superficiem parallelogrammi cujuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas, & super eadem vel æquali basi constituta sunt æqualia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis constituta, & super eadem basi sunt parallelogrammorum dimidia, ac proinde etiam inter se æqualia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematismatis, quod alio modo jam demonstravimus; nempe *quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo æquale esse quadratis laterum*. Hanc vero Geometriæ fecunditatem, totiusque doctrinæ geometricæ conjunctionem variis exemplis Tyronibus sæpe ostendere debet peritus magister.

COR. IV. Cum triangula sunt, ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam, ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium, & altitudinum; ac proinde si bases fuerint æquales, triangula erunt inter se, ut altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt inter se, ut bases.

COR. V. Si altitudo trianguli unius sit ad trianguli alterius altitudinem, ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt æqualia. In hoc enim casu habetur proportio, in qua productum extremorum æquale est producto mediorum, hoc est, productum ex altitudine primi trianguli in basim æquale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt æqualia; & viceversa si  
trian-



quidem ambo constant triangulis æqualibus. Porro per methodos explicatas in triangulis haberi semper poterunt bases, quæ in primo casu sunt circulorum chordæ, in altero autem tangentes; ac proinde omnium quoque chordarum, & tangentium summæ innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti, quæ circuli circumferentia proximè minor est, & polygoni circumscripti perimeter, quæ proximè major est: ita ut defectus, vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, & intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22; ita ut exiguus omnino sit peripheriæ sic inventæ excessus supra veram. Hæc eadem ratio subtilius ab aliis quæsitæ est, & itatuitur, ut 1 ad 3. 14159265 &c. perductis decimalibus numeris ulque ad notat 127; quæ quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 & 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si hæc fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quæsitam, hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli, quam audacter se invenisse non raro jactitant viri Geometriæ imperiti, qui ipsum quidem quæstionis statum, ut plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando per Geometriam sublimiorem figuræ curvilineæ area accurate haberi potest; sed

sed commodissima, & generalis est praxis, quæ figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes, & *physice* rectilneas dividitur, & deinde figuræ totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficies magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tanquam contrarium iis, quæ de numerorum *concreterum* multiplicatione demonstravimus in Arithmetica; non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant Geometræ; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quælibet a pro communi basium, & altitudinum mensura, & sit B numerus integer, aut fractus, rationalis, vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem a; atque H exprimat, quoties altitudo ejusdem parallelogrammi eandem contineat mensuram. Item sit b numerus exprimens quoties mensura a contineatur in basi alterius parallelogrammi; h autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi ejusdem contineat mensuram a; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se, ut productum ex duobus numeris B & H ad productum ex numeris duobus b & h. Hæc est genuina hujus operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem æqualem esse producto ex basi in altitudinem, *æqualitas* proprie dicta intelligi non debet, sed mera proportio. Hæc eadem observatio ad Physicam sæpe trans-

Jacq. T. III.

G

fer-

146      E L E M E N T A  
ferri debet, ubi de spatii, velocitatis, &  
temporis mensura sermo est.

### S E C T I O   I I I .

*De Geometria Solidorum .*

#### C A P U T   I .

*De Solidorum genesi, & proprietatibus .*

**P**ROP. I. SOLIDORUM RECTILINEORUM  
GENESIM EXPLICARE. Si figura rectili-  
nea AGR supra immotam rectam AE  
( Fig. 28 ) motu sibi semper parallelo fera-  
tur; solidum AGROFE inde genitum *prisma*  
dicitur; & *rectum* vocatur, si AE de-  
scribenti plano recta fuerit; sin minus, *ob-*  
*liquum*. Si planum describens fuerit paralle-  
logramum, solidum inde genitum dicitur  
*parallelepipedum*. Si autem planum describens  
sit quadratum, solidum *cubus* nuncupatur.  
Basis solidi, seu planum describens potest  
esse polygonum quodlibet, & solidum inde  
genitum *prismatis* nomen retinet, si e sin-  
gulis polygoni angulis extra planum confur-  
gant lineæ æquales, & parallelæ terminan-  
tes rectilineam solidi faciem; at si rectæ li-  
neæ in apicem coeunt, solidum *pyramis* di-  
citur ( Fig. 29. ).

COR. I. Prisma igitur opposita latera AGR,  
EFO æqualia habet, similia, & parallela;  
cum AGR fluendo per AE motu sibi sem-  
per parallelo tandem congruat cum EFO.  
Præterea dum planum AGR motu sibi pa-  
rallelo describit prisma AGROFE, latera  
AG, GR, RA motu sibi semper parallelo  
describunt parallelogramma AEFG, GFOR,  
ROEA;



ROEA; ac proinde prima tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

COR. II. Parallelepipedum sex parallelogrammis terminatur; cubus autem sex quadratis æqualibus. Nam præter facies quatuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duæ oppositæ parallelo basis motu descriptæ, Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide si omnia latera basis sunt æqualia inter se, & latera rectilinea ipsius pyramidis pariter inter se æqualia, erunt omnes facies triangulo isoscelia æqualia.

COR. IV. Quævis sectio prismatis, vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelæ singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; cum sint interfectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli anguli homologi erunt æquales ( Prop. 2. cap. præc. ) ; ac proinde sectio basi similis est.

COR. V. In prismatico sectio basi parallela ipsi basi æqualis est; in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora in ratione distantiae sectionis a vertice ad distantiam basis ab eodem. In prismatico patet æqualitas, cum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa æqualia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus æqualis est basi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob sectionem parallelam in unaquaque facie habebuntur triangula duo similia.

COR. VI. Omnia prismata collata inter se,

se, atque etiam omnes pyramides inter se comparatæ, si super basibus æqualibus, & inter eadem plana parallela constituantur, solida respective æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcunque planis, quæ sint basibus parallela; sectiones unius prismatis, vel pyramidis æquales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismatico omnes erunt æquales eidem basi; in pyramide erunt ipsi basi similes, & singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiae basis a vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem est, ut patet; cum pyramides terminentur plano basium, & sectionum planis parallelo. Porro solida illa concipi possunt tanquam composita ex iis omnibus sectionibus, quarum singulæ cum singulis æquales sint; ergo erunt & ipsa solida æqualia.

**COR. VII.** Pyramides basium æqualium in eundem apicem desinentes, vel eandem utcunque altitudinem habentes sunt æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum; pyramides semper erunt super æqualibus basibus & in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

**COR. VIII.** Si pyramides eandem habeant altitudinem; erunt inter se, ut bases. Etenim basis major divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori æquales; concipi poterit pyramis major tanquam composita ex diversis pyramidibus, quæ basin habeant

habeant bali minori æqualem; sed pyramides illæ singulæ erunt minori pyramidi æquales; ergo pyramis major est ad minorem, ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illæ sunt inter se, ut bases.

At si basis major minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingatur bases in partes huic mensuræ communi æquales: jam pyramides duæ tot alias continebunt pyramides æquales, quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, ut bases.

Tandem si pyramidum bases forent incommensurabiles, adhibeatur aliqua mensura, quæ minuatur in infinitum, donec fiat utriusque basis mensura communis, quemadmodum dictum est de figurarum similitudine: eodem modo patet, in hoc etiam casu pyramides esse inter se, ut bases.

PROP. II. SOLIDORUM CURVILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si recta sublimis motu sibi semper parallelo circuli circumferentiam radat, figura solida CI hoc motu genita ( Fig. 30. ) *cylindrus* dicitur. At si recta per aliquod punctum fixum, & sublime perpetuo transiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, solidum AGM hoc motum genitum *conus* vocatur. Utriusque autem figuræ *basis* vocatur circulus, cujus circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriusque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum, ipsumque cono verticem, *axis* dicitur. Si

G 3

axis



axis sit perpendicularis basi, cylindrus, vel conus *rectus* solidum genitum appellatur; secus autem, *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quævis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 29. refert cylindrum rectum, figura autem 30. conum rectum repræsentat. Si semicirculus AHF (Fig. 31.) circa immotam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphæra* dicitur.

COR. I. Si basis prismatis, vel pyramidis, aucto numero laterum, & imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cujus latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt æqualia, & distantia a vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si sphæra plano quovis secetur, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphærae, ac deinde erit major, vel minor, prout planum sectionis magis, vel minus recedet a centro sphærae. Sit enim sectio FHI, ad cujus planum ducatur diameter perpendicularis AB, quæ plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C; patet, rectas EI fore radios sphærae. Si autem cadat extra in triangulis CEI, CEF, anguli ad E erunt recti, latus CE commune, & basis CI = CF; quare quodvis latus CI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus; cujus centrum E; illud vero centrum in primo

mo casu coincidet cum centro sphæræ. Patet autem, ob angulum rectum in E, radius circuli EF semper minorem fore radio sphæræ CF, nisi radii illis congruant abeunte E in C. Evidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo major fuerit distantia CE.

COR. III. Sphæra considerari potest tanquam composita ex pyramidulis æqualibus numero finitis, & infinite parvis, quarum bases sunt in ipsa sphæræ superficie, vertex autem communis est ipsum sphæræ centrum,

SCHOL. In Capite præcedenti, ubi prismata & pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, solidum motu continuo superfici; at linea non ex punctis, sed ex lineolis, superficies ex areolis, non ex lineis, solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum & solidorum notionem Tyronibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tanquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repræsentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. præc.) ex sectionum æqualitate prismatum, & pyramidum æqualitatem concludimus; id non debet intelligi, quasi prismata, & pyramides ex sectionibus planis componi velimus; nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duæ infinite proximæ, quarum (in cit. coroll.) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus in-

finite vicinis comprehensa forent æqualia in casu proposito; quare communem altitudinem negligere licuit; solamque sectionum æqualitatem considerare; id vero facere nunquam licet, nisi præter sectionum æqualitatem, ubi æquales etiam sint binarum quarumcunque indefinite proximarum distantia. Porro evidens est, hanc methodum ad *exhaustionum* methodum sæpius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

## C A P U T II.

### *De Solidorum mensura.*

**PROP. I. PRISMATIS, CUJUS LATERA RECTILINEA SUNT BASI PERPENDICULARIA, SUPERFICIEM METIRI.** Singula prismatis facies in hoc casu sunt rectangula sub singulis lateribus basis, singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium hujusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex perimetro basis in unum e lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

**COR. I.** Cum sex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sumatur. Quia vero parallepipedum sex terminatur superficiebus, quarum duæ quælibet oppositæ sunt æquales; inveniantur tres inæquales superficies, illarumque summa bis sumatur;



tur : habebitur tota parallepipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari possit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis, & infinite parvis compositum ; cylindrus haberi poterit tanquam prisma *infinitilaterum* : cujus proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter, seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, & producto addatur dupla basis, sive circuli superficies.

PRO. II. PYRAMIDIS, CUJUS LATERA OMNIA SUNT ÆQUALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM ÆQUALIA, SUPERFICIEM INVENIRE. Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia æqualia ; erit omnium triangulorum summa æqualis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum ; nam triangulum quodlibet æquatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Hæc autem singula perpendicula sunt æqualia ; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera*, ac proinde coni recti superficies æqualis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquæ pyramidis versus basim abeunt in trapezia æqualia ; hæc autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo æqualia, quorum bases sunt sectionis, & basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum trian-

gulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatae æquatur dimidio producto ex summa perimetri basis, & sectionis in distantiam perpendicularem basium.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni hujus truncati versus basim superficies æqualis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncati longitudinem, sive latus. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE, (Fig. 30.) cujus peripheria æqualis sit semisummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B & G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, hæc erit diameter circuli quæsi- ti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh; erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem  $Bf : Df = Dh : Gh$ , ac proinde ob  $Bf = Dh$ , erit etiam  $Df = Gh$ : quare eadem est differentia inter diametros BC & DE, quæ est inter diametros DE & GM; illa nempe differentia est dupla rectæ Df, vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arithmetica inter BC, & GM, seu quod idem est, diameter DE æqualis est semisummæ diametrorum BC, & GM. Sed circuli, utpote figuræ similes, suas habent peripherias diametris proportionales (Schol. cap. 3.): ergo circumferentia circuli diametro DE descripti est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, & GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG.

COR.

**COR. IV.** Si concipiatur cylindrus rectus KQLM ( Fig. 32. ) circumscriptus sphaeræ habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphaeræ maximum; superficies segmenti sphaeræ HAF æqualis erit superficiei cylindri QNRK, & area totius sphaeræ æqualis areæ totius cylindri, demptis basibus. Et enim concipiatur particula quævis Ff circuli *genitoris* ita parva, ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff usque ad BA in G, recta FfG generabit superficiem coniecti, & Ff superficiem coniecti truncati, cuius mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF & ef; ducta autem PO, ita ut peripheria radio PO descripta æqualis sit semisummæ peripheriarum prædictarum; erit coniecti truncati superficies, ut recta Ff ducta in circumferentiam, cuius radius est OP. Jam vero ob triangula similia rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn : Ff = GE : GF = GP : GO = PO : CO, vel EN, ob EN = BL = CO; ideoque Nn × EN = fF × PO, atque ideo cum peripheriæ sint, ut radii; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam æquale producto ex fF in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu Aff æquatur toti areæ genitæ a recta QN; & abeunte REN in MBL, tota sphaeræ superficies totius cylindri superficiei æqualis est, demptis basibus.

**COR. V.** Superficies sphaeræ æqualis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem, sive diametrum sphaeræ, ac proinde



circuli maximi superficies quadruplo major est  
(cor. 1. prop. 2. cap. 2.)

**COR. VI.** Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphaerae superficiem, ut 3 ad 2. Nam superficies sphaerae in hoc casu basi cylindri quadruplo major est, superficies autem tota cylindri sua basi sexies major est.

**PROP. III. PRISMATIS SOLIDITATEM METIRI.** Polygonum, quod prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis, sive polygoni superficies, per altitudinem multiplicari debet.

**COR. I.** Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam basis per ipsum quadrati latus. Parallelepipedi soliditas invenitur, si parallelogrammi superficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem soliditas cylindri, si basis, circuli nempe superficies, in altitudinem cylindri ducatur.

**COR. II.** Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus, evidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficialium. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulae 12 pollicibus aequantur; & ita dicendum de alia qualibet mensura.

**PROP. IV. PYRAMIDIS SOLIDITATEM INVENIRE.** Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33.), cujus basis sit cubi facies quadrata; evidens est, totam cubi soliditatem dividi in sex hujusmodi pyrami-

midēs quadrilateras æque altas & æqualium basium, ac proinde æquales. Igitur pyramis quælibet erit sexta pars cubi; sed cubi mensura æqualis est producto ex basi in altitudinem, ergo illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex basi in sextam partem altitudinis  $HP$ , vel quod idem est, tertiam partem altitudinis  $IP$ . Ergo hujusmodi pyramidis soliditas æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu quod idem est, æquatur tertiæ parti cubi ejusdem basis, & ejusdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, five pyramis quælibet est tertia pars prismatis eandem cum ipsa pyramide basim habentis, eandemque altitudinem. Etenim sit pyramis quælibet, fingaturque cubus, cujus altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Jam si ex centro cubi alia exeat pyramis, cujus basis sit facies quadrata cubi; evidens est, hanc pyramidem habere eandem cum proposita pyramide altitudinem: ac proinde pyramides illæ sunt inter se, ut bases (Cor.8. Prop. 1. cap. præc.) Sed soliditas pyramidis cubi basi innixæ æqualis est producto ex tertia parte altitudinis in basim; ergo ob altitudinem eandem in utraque pyramide erit soliditas propositæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in basim: ideoque generatim pyramis quælibet est tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis.

**COR. I.** Cum cylindrus tanquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tanquam pyramis infinitilatera considerari possint; erit conus tertia pars cylindri eandem habentis basim, & eandem altitudinem.

**COR.**

**COR. II.** Cum sphaera haberi possit tanquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphaerae, bases autem omnes simul sumptae totam occupant sphaerae superficiem; singulae illae pyramides aequales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa aequalis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficie sphaerae in tertiam partem radii. Ergo tota sphaerae soliditas habebitur multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

**COR. III.** Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphaerae aequalis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

**PROP. V.** SOLIDA DUO SIMILIA SUNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERUM HOMOLOGORUM. Ex solidorum definitione & ex praecedentibus propositionibus evidens est, corporis cujuslibet soliditatem esse semper, ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; superficies autem ex duabus dimensionibus componitur, ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum, seu ejusdem nominis: sed solida similia ea dicuntur, quae singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus, ac proinde in ratione triplicata unius cujuslibet dimensionis homologae.

**COR. I.** Sphaerae sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphaerarum soliditates sunt inter se, ut circuli maximi superficies



ficies in radium ducta (Cor. 2. Prop. præc.) Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (Cor. 1. Prop. 3. Sect. præc.) ergo sphaeræ sunt in ratione triplicata semidiametrorum, vel diametrorum. Idem facile patet ex sphaerarum similitudine; cum enim sphaerarum soliditates per circuli maximi superficiem determinantur, sintque circuli figuræ similes; evidens est, sphaeras esse solida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphaeris circumscripti (Cor. 3. Prop. præc.). Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, & cylindri sunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se; erunt ut producta ex basibus, & altitudinibus; quare si bases fuerint æquales, erunt solida, ut solæ altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt ut solæ bases. Si ea solida fuerint æqualia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales, & viceversa, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt æqualia. Tandem si bases fuerint similes, & altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum.

SCHOL. De solidorum rectorum superficiebus in Capite præcedenti sermonem habuimus; verum si solida fuerint obliqua, superficiebus mensura sublimiorem Geometriam aliquando postulat. Quod spectat solida superficiebus planis terminata; res est nullius difficultatis. Cum enim solidorum il-

lorum facies sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cujusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera utpote parallela perpendiculariter quoque secabit, atque sectio erit polygonum, cujus unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscujusque faciei æquabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet ob laterum omnium æqualitatem; ac proinde prismatis superficies æquatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet. Jam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis æqualis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut ante; quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tanquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem, vel latus quodlibet perpendiculariter traductum sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam, quæ *Ellypsis* vocatur a Geometris, de qua in appendice mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies æqualis producto ex Ellypsis circumferentia in latus cylindri. Quod spectat conii obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis superficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse, cum in cono obliquo æquales non sint lineæ omnes ductæ ex vertice conii in basim. Sed hæc pauca monuiss-



nuisse satis sit; hæc enim ad Geometriæ elementa non pertinent.

## A P P E N D I X

### D E L I N E I S C U R V I S .

**L** Ineæ curvæ notionem ita simplicem esse jam observavimus, ut explicatione ulla vix clarior effici possit; quare, prætermissa definitione, de lineis curvis generatim, & deinde de Parabola, & Ellypsi pauca exponemus; alia deinde, ubi necessitas occurreret, demonstraturi.

In curva qualibet ( Fig. 34. ) recta AD lineas parallelas, ut MM, æqualiter dividens, *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. Punctum A in axe *vertex* curvæ dicitur; rectæ autem parallelæ MM dicuntur *ordinatæ*: pars diametri, vel axis inter punctum A, & ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula algebraica, quæ relationem inter semiordinatas, & abscissas exprimit. Ita demonstratum est in circulo ( Fig. 16. ) quadratum rectæ EO æquale esse producto ex CO in OL. Jam diameter CL dicatur a, sitque  $CO = x$ , &  $OE = y$ . Erit  $OL = a - x$ ; ac proinde  $y^2 = ax - x^2$ , quæ est æquatio ad circulum. Ex his evidens est, ordinatas, & abscissas curvæ esse quantitates indeterminatas; hæc autem determinantur, sumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita si in equatione ad circulum fiat  $x = 0, 2, 3, 4$  &c. invenietur  $y = 0, 1, 2, 3$ , &c. &  $a = 10$ . Quare,  
si ex



si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatæ, & per singulas perpendiculararum extremitates ducatur curva, hæc ad quæsitam curvam eo accuratius accedet, quo plures erunt hujusmodi perpendiculares. Ordinatæ non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non a solo diametri, aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abscisse computari possunt vel ab ipso diametri vertice, vel etiam a centro, atque ita prodeunt diversæ ejusdem curvæ equationes. Verum quocunque modo curva consideretur, probe distingui debent rectæ ad dexteram, vel ab sinistram jacentes, & ideo dicuntur *positivæ*, vel *negativæ*. Has quidem vel illas appellare licet positivas, vel negativas; at ubi appellatio determinata est, hæc semper retineri debet: quare semiordinatæ, & abscisse possunt esse vel negativæ, vel positivæ. Ratio autem facile patet ex iis, quæ de quantitatibus positivis, & negativis in Algebra observavimus.

II. Curva quælibet considerari potest vel tanquam curva *polygona*, vel tanquam curva *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curvam esse polygoni inscripti, & circumscripti *limitem*. Unum autem probe observandum est in curvarum consideratione; si nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet, ne eandem curvam velut accuratam habeat, & viceversa; atque etiam eadem regula tenenda est in duarum curvarum consideratione, ambæ scilicet vel tanquam polygonæ, vel tanquam accuratæ considerari debent,

bent; inde enim in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstrabimus. In circulo quocunque PQD (Fig. 35.) ducantur chordæ æquales, & infinitesimæ PD, DE, producatque PD in O; donec  $DO = PD$ . Præterea agantur per puncta O & E recta OQ, & per punctum D tangens DN rectæ OQ occurrens in N; erit  $OE = 2NE$ . Etenim triangulum DOE est isoscele; præterea anguli ODE mensura est dimidius arcus PDE; anguli autem NDE mensura est dimidius arcus DE; ergo recta DN æqualiter dividit angulum ODE; ideoque ob  $DO = DE$ , erit  $OE = 2NE$ . Jam ponatur corpus aliquod describere arcum circuli infinitesimum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam, quæ in loco D corpus a linea recta retrahat. Si consideratur circulus tanquam polygonum, chorda infinitesima PD erit spatiolum tempore præcedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola æqualis, & in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti æquali descriptum. Quare si ducatur OE, directioni vis in D agentis parallela, erit hæc lineola OE vis hujus effectus; vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tanquam accuratus, tangens DN erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE vis hujus effectus. Itaque in curva polygonæ vis effectus repræsentatur per OE, & in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioqui effectus duplo major æstimeretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus dumtaxat comparamus, res perinde se habet, quæcum-

cumque adhibeatur curvarum consideratio; eadem enim prodit effectuum proportio. Hæc autem, quæ modo explicavimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in Physica generali demonstrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest; quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quælibet plana considerari solet tanquam ex motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita; hic non agimus de curvis, quarum puncta singula in eodem non sunt plano; & ideo dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens est, curvam quamlibet ad lineas duas in plana positione datas, ordinatas nempe, & abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis vestigia secundum certam, eandemque legem ad rectas positione datas referri, ita ut punctum illud secundum eandem omnino legem in quolibet infinitesimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eandem, sed plures curvas describeret (contra hyp.). Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur. 1°. Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim, rectam in duobus, tribusve punctis contiguis curvam tangere; jam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat.... 2°. Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuscunque circuli minoris eandem habenti tangentem arcus aliquis utrinque circa punctum contactus sit in-



intra curvam, cujuscumque vero circuli majoris arcus sit extra curvam; hunc circumulum dicimus *curvæ osculatorem* in dato puncto, & curvæ ipsius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem est ex Geometriæ elementis, circuli osculatoris centrum positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eandem curvam, ubi puncta duo curvæ ad se invicem in infinitum accedunt; hæc enim est circuli proprietas, ut rectæ a centro ad peripheriam ductæ sint ipsi peripheriæ perpendiculares; talis autem recta e. centro circuli osculatoris ad curvam ducta vocatur *radius osculator*...

3<sup>o</sup>. Quamvis inter tangentem, & arcum circuli transire possint alii circuli innumeri, at tamen inter arcum curvæ, & arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (ex def.) quicumque minor circulus, est intra curvam; quicumque major, est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum utilitas eo reducitur, ut omnium curvarum arcus infinitesimus considerari possit tanquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris, & arcus infinitesimus curvæ easdem habent proprietates, cum radius sit ad circumulum osculatorem & ad arcum infinitesimum curvæ perpendicularis.... 4. Hinc definiri potest curvarum in quolibet puncto curvatura; satis enim erit diversas circulorum osculatorum curvaturas inter se comparare; quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est, diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum; quod ut intelligatur, fingamus, duas rectas æquales in circumulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semi-

micircumferentiam tantum: manifestum est, semicircumferentiam duplo minus curvam esse, quam semicircumferentiam integram; & duplo major est radius circuli, ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili rationatione patet, si recta eadem in arcum duplo, vel triplo majorem incurvetur, & ita deinceps. Sed rem generatim demonstravimus. Sint duo circuli inæquales  $C$  &  $c$ , quorum radii  $R$  &  $r$  ponantur in data ratione  $m$  ad  $n$ . In his circulis capiantur arcus æquales, dicaturque  $A$  arcus in majori circulo, &  $a$  arcus in minori; arcus  $A$  curvatura minor erit curvatura arcus æqualis  $a$  in ratione  $R$  ad  $r$ . Jam vero in circulo majori capiatur arcus  $A$ , qui similis sit arcui  $a$  in minori circulo; erit  $A : a = C : c = R : r$ . Quare cum sit  $a = A$ : erit etiam  $A : a = R : r = m : n$ . Igitur si arcus  $A$  similis arcui  $a$  contineat partes vel gradus  $m$ ; arcus  $A$  continebit partes vel gradus  $n$ ; ac proinde curvatura arcus  $a$  est ad curvaturam arcus  $A$ , ut  $m$  ad  $n$ . Quare eadem manente arcuum  $A$  &  $a$  magnitudine, circulorum  $c$  &  $C$  curvaturæ sunt in ratione  $m$  ad  $n$ , hoc est in ratione reciproca radiorum. Comparari ergo inter se possunt diversæ curvarum curvaturæ, atque etiam variæ ejusdem curvæ in diversis punctis curvaturæ: inveniantur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli, qui curvam in dato puncto tangens cum ipsa curva ita congruat, ut inter curvam, & circum nullus alius circulus transire possit. Et quidem quum aucto, vel diminuto circuli radio, minuatur, vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui propius, quam circulus osculator, ad curvam accedat, concludendum

dum est, circulum cum ipsa curva in hoc puncto eandem habere curvaturam. Ex his patet, finitam esse curvæ alicujus curvaturam, si finitus sit radius osculator; at si radius osculator sit infinitus, curvatura est nulla; tandem si radius osculator  $= 0$ , curvatura est infinita. Cæterum hæc omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam, quæ de methodo *exhaustionum*, & de *primis*, ac *ultimis rationibus* jam explicata sunt. Hæc pauca, quorum usus in Physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest, ut Parabolæ, & Ellypseos naturam breviter exponamus.

IV. Si in axe AD (Fig. 34.) sumantur abscissæ quotlibet, & ad singula puncta erigantur semiordinatæ, ea lege, ut abscissæ semper sint, ut quadrata ordinatarum; curva per singulas ordinatarum extremitates transiens dicitur *Parabola*. Jam abscissa dicatur  $x$ , & ordinata  $y$ , erit semper  $x$ , ut  $y^2$ ; ac proinde ratio ordinatarum ad abscissas constans, & eadem manet; quare si  $p$  sit quantitas constans, erit  $\frac{y^2}{x} = p$ , ac proinde  $y^2 = px$ , quæ est æquatio ad Parabolam; nempe in omni Parabola quadratum ordinatæ æquale est producto ex abscissa in quantitatem constantem; hæc autem quantitas constans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abscindatur recta AF, quæ sit quartæ parametri parti æqualis, punctum F Parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam crescente abscissa, crescit etiam quadratum ordinatæ; evidens est, Parabolam non esse curvam in se redeuntem, sed puncta illius singula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR.



COR. II. Data abscissa qualibet, ejusque ordinata, inveniri semper poterit parameter; cum sit tertia proportionalis ad ordinatam, & abscissam.

COR. III. Si abscissa ponatur  $= 0$ , fit quoque ordinata perpendicularis  $MM = 0$ , ac proinde puncta  $M$ ,  $M$  coeunt in  $A$ , nempe in axis vertice. Quare si per vertice Parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens Parabolæ in puncto  $A$ .

COR. IV. Ducta intelligatur secans per punctum  $N$ , quæ Parabolæ occurrat in alio puncto  $t$ , ex quo demittatur perpendicularis  $tp$ , ad quam ex puncto  $N$  erigatur perpendicularis  $Nq$  axi parallela. Sit  $PT = s$ ,  $AP = x$ ,  $PN = y$ ; erit  $PT (s) : PN (y) = Nq (f) : \frac{fy}{s} = qt$ ; ac proinde  $pt = PN +$

$qt = y + \frac{fy}{s}$ , &  $Ap = x + f$ . Jam sumatur æquatio ad curvam in puncto  $t$  erit  $pt^2 = Ap \times p = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = px + pf$ : deletisque in hac æquatione terminis æqualibus  $y^2 = px$ , fiet  $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$  & dividendo per  $f$ , erit  $\frac{y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = p$ .

Jam puncta  $N$  &  $t$  ad se invicem accedant in infinitam, mutuoque coeant; secans abit in tangentem, fitque  $Nq$ , vel  $Pp = 0$ : quare  $f = 0$ , &  $\frac{fy^2}{s} = 0$ , ac proinde æquatio præcedens abit in hanc  $\frac{y^2}{s} = p$ , &  $2y^2 = ps$ , seu ob  $px = y^2$ , fiet  $2px = ps$ ,  $2x = s = PT$ . Igitur in Parabola recta  $PT$ , quæ *subtangens* dicitur, dupla est abscissæ  $AP$ . COR.

COR. V. Recta FN ducta ex foco Parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuslibet æqualis est abscissæ AP, & quartæ parti parametri. Nam cum sit  $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$ , vel  $= \frac{1}{4}p - x$ , prout ordinata jacet supra vel infra punctum F; erit  $PF^2 = AP^2 - AF^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ . Præterea  $PN^2 = px$ , ergo  $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ , &  $FN = x + \frac{1}{4}p = Ap + AF$ .

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS æqualis est angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN; præterea triangulum PTN est isoscele ob  $FN = AP + AF = AT + AF = FT$ ; ac proinde angulus GNS æqualis est angulo FNT. Hæc est tangentis proprietas, quæ in Physicis institutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Si in axe HI sumantur abscissæ quotlibet (fig. 39.) & ad singula puncta erigantur ordinatæ FN & PM, ea lege, ut sit semper FN ad PM in ratione HF x FI ad HP x PI, curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Ellypsis* quæ in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint æqualia producto ex segmentis abscissarum. Jam dicatur axis major HI = a, ducaturque ex puncto axis medio C recta BCD, quæ dicitur axis minor, sitque BC = b, HP = x, PM = y, PI = a - x, erit  $a - x \times x : y^2 = a^2 : b^2$  &  $y^2 = \frac{ab^2x - b^2x^2}{a^2}$ , quæ est æquatio ad Ellypsim, in qua si ponatur a = b, fit  $y^2 = ax - xx$  æquatio ad circulum. Si abscissæ computentur a centro C, sit CP = H x,

$x$ ,  $PM = y$ , fiatque  $HI = 2a$ ; erit in hoc casu  $aa - xx : y^2 = aa : bb$ , &  $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ . Si ex minoris axis extremitate  $B$ ,

tanquam centro, & intervallo  $BF = CH$ , tanquam radio describatur arcus circuli axi majori occurrens in punctis  $F$  &  $f$ , puncta illa vocantur *Ellypseos foci*; evidens autem est, hæc puncta e centro *Ellypseos* æqualiter distare: nam ob  $BC$  axi perpendicularem triangula  $CBF$  &  $CBf$  sunt æqualia.

**COR. I.** Cum duo *Ellypseos* axes fiat constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt *Ellypseos* axes, duæ etiam sunt *parameteri*; si nempe axis major sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis *parameter* axis majoris dicitur, & contra. Jam si abscissæ ab axis extremitate computentur, sit axis major  $a$ , minor  $b$ , *parameter*  $p$ , erit  $ap = b^2$ . Si autem abscissæ computentur a centro, sit  $2a$  axis major, &  $2b$  axis minor, erit  $2ap = 4b^2$ , his autem valoribus in utraque æquatione ab *Ellypsim* substitutis, æquatio *Ellypseos* in primo casu fit  $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ ; in

casu altero habetur  $y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{px^2}{2a}$ .

**COR. II.** Ex *Ellypseos* æquatione evidens est, eam esse curvam in se redeuntem, & undique terminatam; crescentibus enim abscissis a centro computatis decrescunt ordinatæ, ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi æqualis sumatur. Manifestum est, mutua axium in centro  $C$  intersectione *Ellypsim* in quatuor partes similes & æquales dividi,



vidi, quum eadem sit ad quamlibet partem curvæ æquatio; omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn perpetuo decrescente, puncta N & n coeunt in H; patet, tangentem in H esse perpendicularem.

COR. III. Distantia focorum a centro facile invenitur; nam cum sit  $BF = HC$ , erit  $FC^2 = HC^2 - BC^2 = HC^2 - BC^2 \times \frac{HC - BC}{HC + BC}$ . Quare distantia foci a centro est media proportionalis inter semiaxium summam, illorumque differentiam. Præterea ob triangulum BCF rectangulum erit  $BC^2 = HC^2 - FC^2$ , ac proinde  $HC - FC : BC = BC : HC + FC$ , seu  $HF : BC = BC : FI$ , nempe semiaxis minor est medius proportionalis inter foci unius distantias ab utroque axis majoris vertice.

COR. IV. Ex Ellipseos constructione summa rectarum BF & Bf æqualis est axi majori; at ponamus, eandem manere summam in quolibet puncto, sitque  $RF + Rf = HI$ . Dicatur  $HC = a$ ,  $BC = b$ , ordinata  $RS = y$ ,  $CS = x$ ,  $fC = c$ ; erit  $IS = a - x$ ,  $HS = a + x$ ,  $fS = c - x$ ,  $FS = a + x$ ,  $HF$ , vel  $If = a - c$ ,  $Hf$ , vel  $IF = a + c$ . Jam vero cum sit (per hyp.)  $FR + fR = 2a$ , si differentia inter FR, & fR dicatur  $2z$ , erit  $fR = a - z$ , &  $FR = a + z$ . Jam ob triangula FRS & fRS rectangula erit  $fS^2 + SR^2 = fR^2$ , hoc est  $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$ . Præterea  $FS^2 + SR^2 = FR^2$ , hoc est,  $c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2$ ; habentur ergo æquationes duæ, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet ex

$$H \quad 2 \quad =$$

$= 4az$ , &  $z = \frac{cx}{a}$ , quo valore substituto  
 in prima æquatione loco  $z$ , ideoque &  $\frac{c^2 x^2}{a^2}$   
 loco  $z^2$  erit  $- 2cx + xx + yy = aa -$   
 $\frac{2xcz}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$ , factaque, ut moris est, re-  
 ductione, habebitur  $a^2 c^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2$   
 $= a^4 + c^2 x^2$  &  $a y = a^2 - a c^2 - a x^2$   
 $+ c^2 x^2$ , factaque divisione per  $a^2 - c^2$   
 habetur  $\frac{a^2 y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$ ; loco  $b^2$   
 substituatur  $a^2 - c^2$  fiet  $\frac{a^2 y^2}{a^2 b^2 - b^2 x^2} = a^2 - x^2$   
 & tandem  $= \frac{a^2 y^2}{a^2 - c^2}$ ; quæ est

æquatio ad Ellypsim ante inventa. Hæc ergo  
 est Ellypseos proprietas, ut ductis ex utroque  
 foco rectis ad punctum perimetri quodlibet  
 concurrentibus, rectarum illarum summa sit  
 axi majori semper æqualis. Hanc eandem pro-  
 prietatem ex æquatione Ellypseos derivare  
 facile est; verum ex proprietate ipsa æqua-  
 tionem elicere placuit, ut exemplum esset Ty-  
 ronibus, qua ratione ad æquationem curvæ ex  
 data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc  
 evidens est, datis duobus Ellypseos axibus El-  
 lypsim facili manu describi posse; sumptis  
 nempe in axe majori duobus punctis tan-  
 quam focus, his affixum retineatur filum,  
 atque per fili longitudinem ita promoveatur  
 acus aliqua, ut filum perpetuo tensum ma-  
 neat, acus motu suo Ellipsis peripheriam per-  
 curret, ut patet ex perpetua partium fili, &  
 axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto  $R$  in Ellypseos peri-  
 metro ad utrumque focum  $f, F$  ducantur rectæ  
 $FR, fR$ , & in linea producta  $FR$  sumatur  
 $RT = Rf$ , ducaturque  $Tf$ , ad quam per pun-  
 ctum

Etum medium E, & per punctum R agatur ER: hæc erit tangens in R. Etenim ponamus, rectam ER Ellypsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto r in recta RE agantur lineæ rT, rf, rF. Quoniam (per constr.)  $TR = Rf$ , &  $fE = ET$ , erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectæ ERr æqualiter distant a punctis f, T, ideoque  $rf = rT$ . Sed  $Fr + rT$  major est, quam FT; ergo etiam  $Fr + rf$  major est, quam FT; ideoque etiam major, quam HI; cum (per const.) sit  $FT = HI$ ; quare punctum r non pertinet ad Ellypsim; ergo recta RE tangit Ellypsim in unico puncto R. Hæc est utilissima in Physicis institutionibus tangens proprietas, quam quidem ex Ellypseos æquatione, non secus ac in Parabola fecimus, eruere licebat; sed diversas veritatis invenientæ vias Tyronibus demonstrare maxime convenit.

SCHOL. Parabolæ, & Ellypseos æquationem consideravimus, ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curvarum illarum æquationes invenire, si ordinatæ ad diametrum quamlibet referantur; eadem est in singulis casibus curvarum illarum natura. Primarias dumtaxat proprietates demonstrasse satis sit, alias enim, ubi necessitas postulaverit, in Physicis institutionibus explicabimus. Præterea etiam ad exercendum, acuendumque ingenium aliquid Tyronibus relinquere opportunissimum est, idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicæ* appellantur Parabola, & Ellypsis, quibus etiam annumerari debet *Hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, utpote nullius fere usus in nostris Physicis Institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit, si tres illas



illas curvas in coni sectione consideremus .

Sit ABC conus (Fig. 37) circulari basi insistent, & secetur plano quolibet IEM. Ponatur sectio alia KILM parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI, intelligaturque sectio tertia priores duas in EH, & KL perpendiculariter bisecans, atque etiam conum in triangulo ABC. Jam producto EH, donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG rectæ KL parallelis, & occurrentibus sectioni triangulari in F, & G, dicatur EF = a, DG = b, ED = c, EH = x, & HI = y, ob triangulorum EHL & EDG similitudinem, erit ED (c): DG (b) = EH (x):

$\frac{bx}{c}$   
HL = — . Simili modo ob triangulorum

DEF & DHK similitudinem erit DE (c): EF (a) = DH (c-x) (Fig. 39) vel c + x (Fig.

38): HK =  $\frac{ac+ax}{c}$ . Tandem cum sectio

KIL parallela basi sit circulus, ut patet ex genesi ipsius coni, erit HK × KL = HI<sup>2</sup>,

hoc est  $\frac{abx}{c} + \frac{abxx}{cc} = yy$ ; at si ponatur

sectionem ita se habere, ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela; tunc erit HK = EF = a, ideoque HK × HL = HI<sup>2</sup>,

hoc est  $\frac{abx}{c} = y^2$ . Si æquationes illas seor-

sim consideremus, evidens est, figuram 37 Ellipsim referre, cum quadrata ordinatarum semper sint, ut productum ex segmentis abscissarum. Figura 38 refert curvam, quæ *Hyperbola*

*bola* dicitur; in hac autem curva non secus ac in Ellypsi, quadrata ordinatarum sunt, ut productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est Ellypsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare duobus conici lateribus occurrat; at sectio conica fit Hyperbola, si planum secans neque sit conici lateribus parallelum, neque duo secet conici latera: sed in hoc casu sectio ita se habet, ut planum secans productum cono ad verticem opposito occurrat in D, alteraque sectione generet Hyperbolam oppositam. Recta DE dicitur *axis transversus*, punctum huius axis medium vocatur *centrum* Hyperbolarum, per quod si ducatur hinc & inde recta perpendicularis ea proportionem, ut productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatæ, sicut est quadratum axis transversi ad quartum terminum proportionalem; habebitur quadratum axis, qui *conjugatus*, vel *secundus* axis appellatur. Igitur in æquatione ad Hyperbolam punctum D sumitur in Hyperbola opposita, & productum ex segmentis abscissarum est  $DH \times EH$  (Fig.

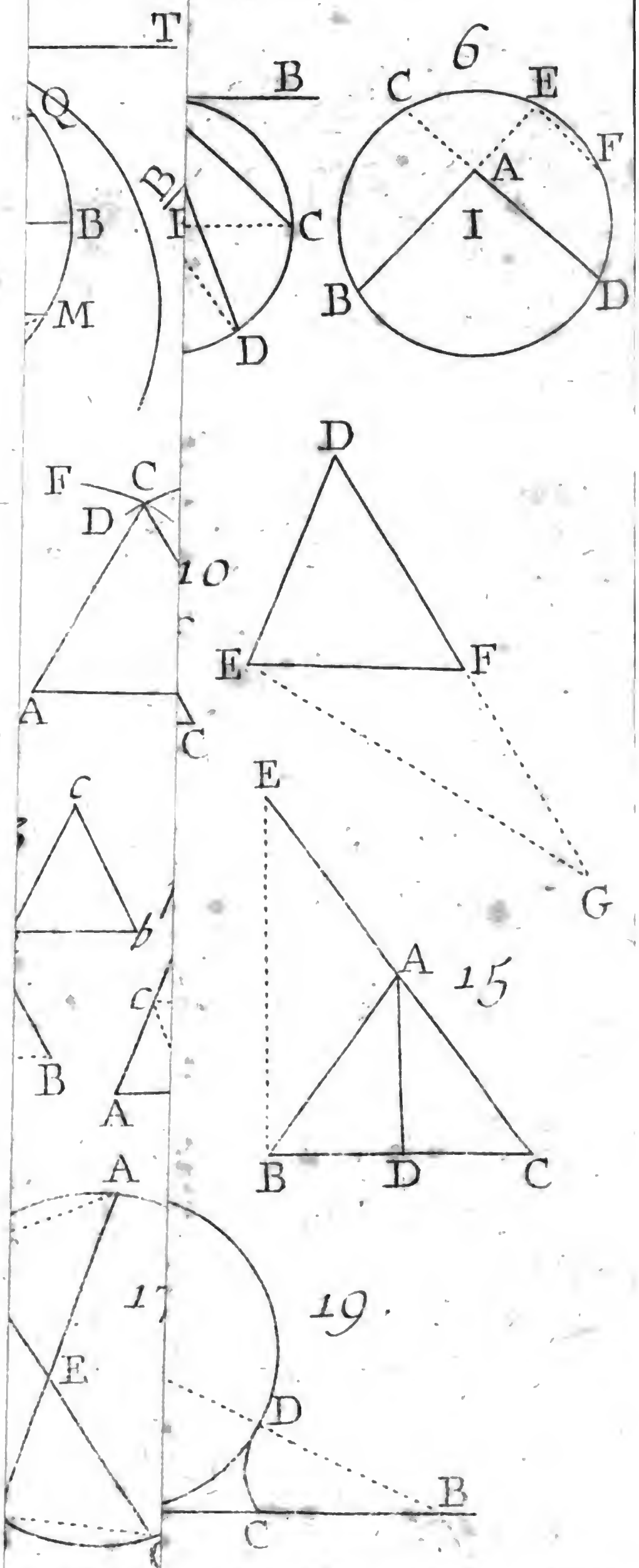
38). Tertiam æquationem  $\frac{abx}{c} = y^2$  esse ad Parabolam, cuius parameter  $\frac{ab}{c}$  ex antea

demonstratis evidens est. In hac autem curva planum secans est alterutri lateri conici parallelum. Itaque cum ex conici sectione nate sint tres illæ curvæ, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed hæc breviter dicta sint, ut Algebrae usus in Geometria Tyronibus ostendatur.

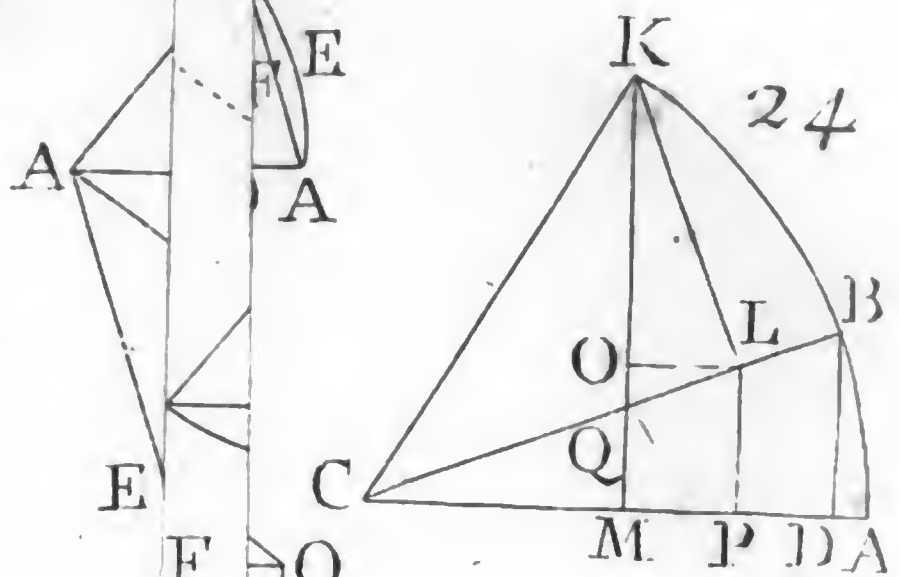
F I N I S .



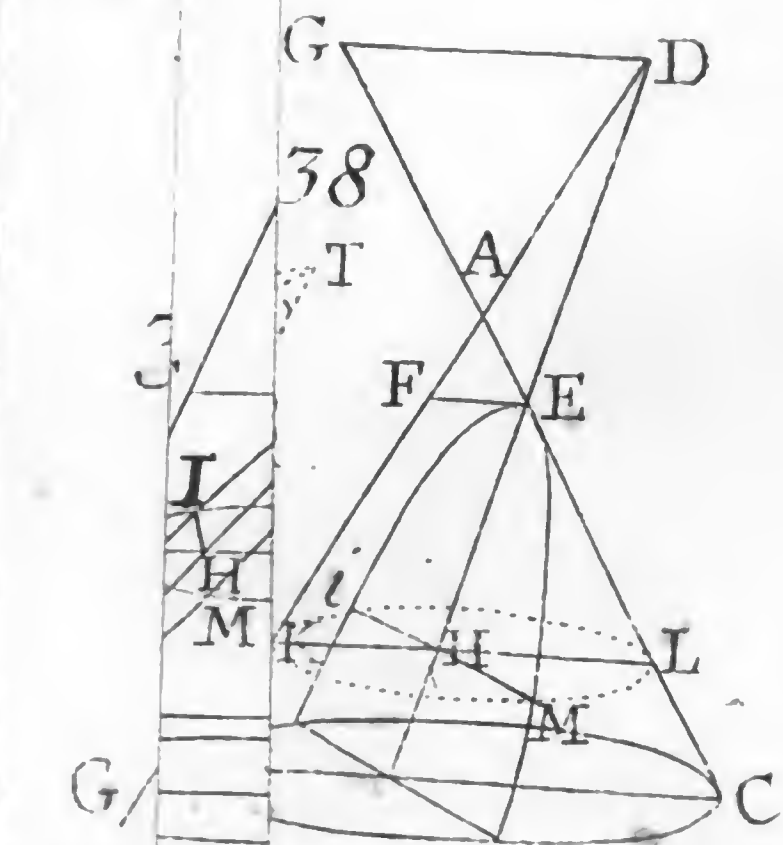
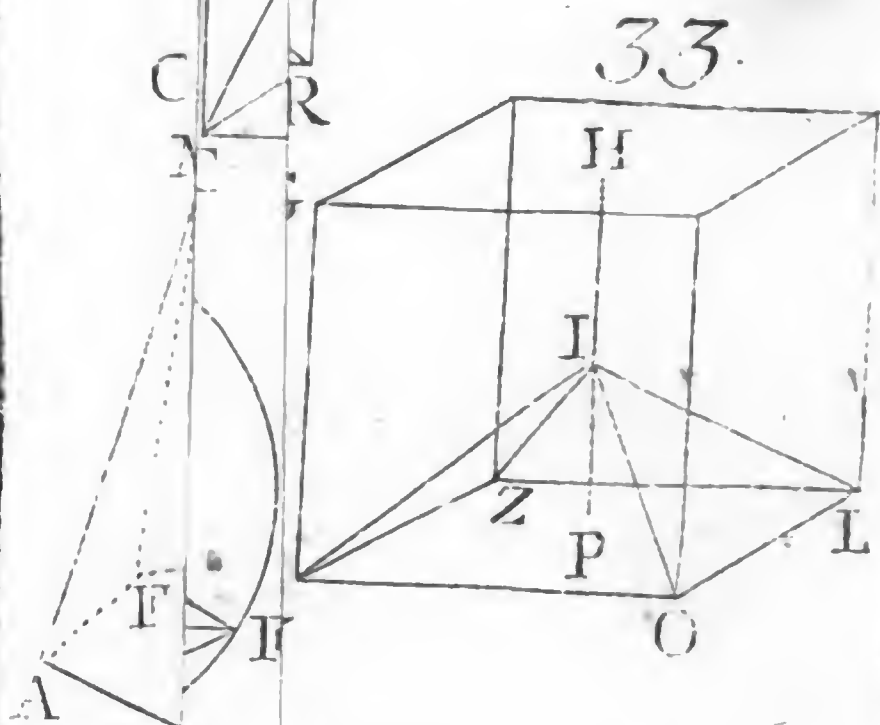








28







152659500





